

РЕЛАКСАЦИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВЫСОКОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

С. А. Чивилихин

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия

sergey.chivilikhin@gmail.com

PACS 47.15.G-

Исследована релаксация малого локального возмущения плоской поверхности высоковязкой жидкости бесконечной глубины под действием силы тяжести и поверхностного натяжения. Получено аналитическое решение и выявлены качественные особенности релаксации возмущения.

Ключевые слова: Квазистационарное приближение Стокса, свободная поверхность, линейное приближение, релаксация возмущения.

1. Введение

Квазистационарное приближение Стокса [1] используется при расчете вязких течений с малыми числами Рейнольдса. Я. И. Френкель впервые использовал это приближение для описания течения со свободными границами [2]. Это приближение используется для описания разрушения пузырей [3], формирования каспа на поверхности жидкости [4, 5], коалесценции жидких частиц [6], в некоторых задачах нанофлюидики [7].

Идея использовать это приближение для описания волн на поверхности жидкости впервые была высказана Ламбом [8]. Левич [9] использовал приближение Стокса для описания релаксации малых гармонических возмущений свободной поверхности. В настоящей работе, вслед за [10], исследуется эволюция малых возмущений поверхности жидкости. Получено уравнение для эволюции Фурье-образа возмущения. Предложен метод качественного анализа пространственно-временной картины релаксации возмущений. Выявлены особенности релаксации длинноволновых и коротковолновых возмущений. Полученные закономерности согласуются с результатами точного решения задачи.

2. Уравнение эволюции формы поверхности

Рассмотрим полупространство, заполненное вязкой несжимаемой ньютоновой жидкостью постоянной вязкости. Пусть в начальный момент плоская граница полупространства получила малое локальное возмущение. Будем изучать эволюцию этого возмущения под действием силы тяжести, внешней распределенной силы, заданной на свободной поверхности и распределенного массового потока на этой поверхности.

Введем прямоугольную систему координат с осями (x_1, x_2) , расположенными на невозмущенной поверхности и осью x_\perp направленной вдоль внешней нормали к ней. Тогда возмущение поверхности можно задать в виде $x_\perp = h(\mathbf{x}, t)$, где \mathbf{x} — вектор с компонентами x_1, x_2 , t — время. Запишем уравнения движения в приближении Стокса, уравнение неразрывности, уравнение для перенормированного давления $\Pi = P - \rho g x_\perp$ (где P — истинное давление), граничные и начальные условия в виде

$$\begin{cases} \partial_{\perp\perp}^2 V_{\perp} + \partial_{\beta\beta}^2 V_{\perp} = \frac{1}{\mu} \partial_{\perp} \Pi, \\ \partial_{\perp\perp}^2 V_{\alpha} + \partial_{\beta\beta}^2 V_{\alpha} = \frac{1}{\mu} \partial_{\alpha} \Pi, \\ \partial_{\perp} V_{\perp} + \partial_{\beta} V_{\beta} = 0, \\ \partial_{\perp\perp}^2 \Pi + \partial_{\beta\beta}^2 \Pi = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$(-\Pi + 2\mu \partial_{\perp} V_{\perp})|_{x_{\perp}=0} = \sigma \partial_{\beta\beta}^2 h - \rho g h + f_{\perp}, \quad \mu (\partial_{\alpha} V_{\perp} + \partial_{\perp} V_{\alpha})|_{x_{\perp}=0} = f_{\alpha},$$

$$\begin{pmatrix} V_{\perp} \\ V_{\alpha} \\ \Pi \end{pmatrix} \Big|_{x_{\perp} \rightarrow -\infty} = 0, \quad (2)$$

где V_{α} , V_{\perp} и f_{α} , f_{\perp} — составляющие скорости и внешней силы, μ , ρ и σ — динамическая вязкость, плотность и коэффициент поверхностного натяжения жидкости, по дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Уравнение эволюции свободной границы имеет вид

$$\partial_t h = V_{\perp}|_{x_{\perp}=0} + W, \quad (3)$$

где W описывает влияние внешнего массового потока на скорость движения свободной поверхности.

Применяя к (1) – (3) двумерное преобразование Фурье по продольным координатам

$$f_{\mathbf{k}} = \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^2\mathbf{x}$$

имеем

$$\begin{cases} \partial_{\perp\perp}^2 V_{\perp\mathbf{k}} - k^2 V_{\perp\mathbf{k}} = \frac{1}{\mu} \partial_{\perp} \Pi_{\mathbf{k}}, \\ \partial_{\perp\perp}^2 V_{\alpha\mathbf{k}} - k^2 V_{\alpha\mathbf{k}} = \frac{ik_{\alpha}}{\mu} \Pi_{\mathbf{k}}, \\ \partial_{\perp} V_{\perp} + ik_{\beta} V_{\beta\mathbf{k}} = 0, \\ \partial_{\perp\perp}^2 \Pi_{\mathbf{k}} - k^2 \Pi_{\mathbf{k}} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$(-\Pi_{\mathbf{k}} + 2\mu \partial_{\perp} V_{\perp\mathbf{k}})|_{x_{\perp}=0} = -(\sigma k^2 + \rho g) h_{\mathbf{k}} + f_{\perp\mathbf{k}}, \quad \mu (ik_{\alpha} V_{\perp\mathbf{k}} + \partial_{\perp} V_{\alpha\mathbf{k}})|_{x_{\perp}=0} = f_{\alpha\mathbf{k}},$$

$$\begin{pmatrix} V_{\perp\mathbf{k}} \\ V_{\alpha\mathbf{k}} \\ \Pi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \Big|_{x_{\perp} \rightarrow -\infty} = 0, \quad (5)$$

$$\partial_t h_{\mathbf{k}} = V_{\perp\mathbf{k}}|_{x_{\perp}=0} + W_{\mathbf{k}}. \quad (6)$$

Введем теперь продольную $V_{\mathbf{k}}^{\parallel}$ и поперечную $V_{\mathbf{k}}^{\perp}$ по отношению к волновому вектору \mathbf{k} составляющую Фурье-образа продольной скорости

$$V_{\alpha\mathbf{k}} = \frac{k_{\alpha}}{k} V_{\mathbf{k}}^{\parallel} + V_{\alpha\mathbf{k}}^{\perp}, \quad V_{\mathbf{k}}^{\parallel} = \frac{k_{\beta}}{k} V_{\beta\mathbf{k}}, \quad V_{\alpha\mathbf{k}}^{\perp} = \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} \right) V_{\alpha\mathbf{k}}.$$

Тогда (4), (5) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \partial_{\perp\perp}^2 V_{\perp\mathbf{k}} - k^2 V_{\perp\mathbf{k}} = \frac{1}{\mu} \partial_{\perp} \Pi_{\mathbf{k}}, \\ \partial_{\perp\perp}^2 V_{\mathbf{k}}^{\parallel} - k^2 V_{\mathbf{k}}^{\parallel} = \frac{ik}{\mu} \Pi_{\mathbf{k}}, \\ \partial_{\perp\perp}^2 V_{\alpha\mathbf{k}}^{\perp} - k^2 V_{\alpha\mathbf{k}}^{\perp} = 0, \\ \partial_{\perp} V_{\perp} + ik V_{\mathbf{k}}^{\parallel} = 0, \\ \partial_{\perp\perp}^2 \Pi_{\mathbf{k}} - k^2 \Pi_{\mathbf{k}} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (-\Pi_{\mathbf{k}} + 2\mu \partial_{\perp} V_{\perp\mathbf{k}})|_{x_{\perp}=0} &= -(\sigma k^2 + \rho g) h_{\mathbf{k}} + f_{\perp\mathbf{k}}, \\ \mu (ik V_{\perp\mathbf{k}} + \partial_{\perp} V_{\mathbf{k}}^{\parallel})|_{x_{\perp}=0} &= f_{\mathbf{k}}^{\parallel}, \quad \mu \partial_{\perp} V_{\alpha\mathbf{k}}^{\perp}|_{x_{\perp}=0} = f_{\alpha\mathbf{k}}^{\perp}, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} V_{\perp\mathbf{k}} \\ V_{\mathbf{k}}^{\parallel} \\ V_{\alpha\mathbf{k}}^{\perp} \\ \Pi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \Big|_{x_{\perp} \rightarrow -\infty} = 0. \quad (8)$$

Из уравнения неразрывности сразу получаем

$$V_{\mathbf{k}}^{\parallel} = \frac{i}{k} \partial_{\perp} V_{\perp\mathbf{k}}. \quad (9)$$

Тогда, с учетом уравнения для давления, граничное условие по касательному напряжению принимает вид

$$(2\mu k^2 V_{\perp\mathbf{k}} + \partial_{\perp} \Pi_{\mathbf{k}})|_{x_{\perp}=0} = -ik f_{\mathbf{k}}^{\parallel}. \quad (10)$$

Представляя Фурье-образ нормальной составляющей скорости в виде

$$V_{\perp\mathbf{k}} = \tilde{V}_{\perp\mathbf{k}} + \frac{x_{\perp}}{2\mu} \Pi_{\mathbf{k}}, \quad (11)$$

запишем (7), (8) в расщепленной форме

$$\partial_{\perp\perp}^2 \tilde{V}_{\perp\mathbf{k}} - k^2 \tilde{V}_{\perp\mathbf{k}} = 0, \quad (12)$$

$$2\mu \partial_{\perp} \tilde{V}_{\perp\mathbf{k}} \Big|_{x_{\perp}=0} = -(\sigma k^2 + \rho g) h_{\mathbf{k}} + f_{\perp\mathbf{k}}, \quad \tilde{V}_{\perp\mathbf{k}} \Big|_{x_{\perp} \rightarrow -\infty} = 0,$$

$$\partial_{\perp\perp}^2 V_{\alpha\mathbf{k}}^{\perp} - k^2 V_{\alpha\mathbf{k}}^{\perp} = 0, \quad (13)$$

$$\mu \partial_{\perp} V_{\alpha\mathbf{k}}^{\perp} \Big|_{x_{\perp}=0} = f_{\alpha\mathbf{k}}^{\perp}, \quad V_{\alpha\mathbf{k}}^{\perp} \Big|_{x_{\perp} \rightarrow -\infty} = 0,$$

$$\partial_{\perp\perp}^2 \Pi_{\mathbf{k}} - k^2 \Pi_{\mathbf{k}} = 0, \quad (14)$$

$$\partial_{\perp} \Pi_{\mathbf{k}} \Big|_{x_{\perp}=0} = -ik f_{\mathbf{k}}^{\parallel} - 2\mu k^2 \tilde{V}_{\perp\mathbf{k}} \Big|_{x_{\perp}=0}.$$

Интегрируя (12) – (14) и используя (9), (11), получаем

$$V_{\perp\mathbf{k}} = -\frac{1}{2\mu k} \left\{ (1 - kx_{\perp}) [(\sigma k^2 + \rho g) h_{\mathbf{k}} - f_{\perp\mathbf{k}}] + ik_{\beta} x_{\perp} f_{\beta\mathbf{k}} \right\} e^{kx_{\perp}}, \quad (15)$$

$$V_{\alpha\mathbf{k}} = \frac{1}{\mu k} \left\{ \frac{k_{\alpha}}{2k} \left[ikx_{\perp} ((\sigma k^2 + \rho g) h_{\mathbf{k}} - f_{\perp\mathbf{k}}) + (1 - kx_{\perp}) \frac{k_{\beta}}{k} f_{\beta\mathbf{k}} \right] + f_{\alpha} \right\} e^{kx_{\perp}}, \quad (16)$$

$$\Pi_{\mathbf{k}} = \left[(\sigma k^2 + \rho g) h_{\mathbf{k}} - f_{\perp \mathbf{k}} - i \frac{k_{\beta}}{k} f_{\beta \mathbf{k}} \right] e^{k x_{\perp}}. \quad (17)$$

Видно, что возмущения скорости и давления убывают с глубиной, причем гармоника с волновым числом \mathbf{k} возмущает жидкость в слое с характерной глубиной k^{-1} . На поверхности жидкости, при $x_{\perp} = 0$, имеем

$$\begin{aligned} V_{\perp \mathbf{k}0} &= -\frac{1}{2\mu k} [(\sigma k^2 + \rho g) h_{\mathbf{k}} - f_{\perp \mathbf{k}}], & V_{\alpha \mathbf{k}} &= \frac{1}{\mu k} \left(\frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{2k^2} f_{\beta \mathbf{k}} + f_{\alpha \mathbf{k}} \right), \\ \Pi_{\mathbf{k}0} &= \left[(\sigma k^2 + \rho g) h_{\mathbf{k}} - f_{\perp \mathbf{k}} - i \frac{k_{\beta}}{k} f_{\beta \mathbf{k}} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) видно, что продольная составляющая внешней силы не оказывает влияния на перпендикулярную составляющую скорости, но определяет продольную скорость на поверхности. При отсутствии продольной составляющей внешней силы, продольная скорость на свободной поверхности обращается в нуль.

На основании (6), (18) уравнение движения свободной поверхности можно записать в виде

$$\partial_t h_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2\mu k} (\sigma k^2 + \rho g) h_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\mu k} f_{\perp \mathbf{k}} + W_{\mathbf{k}}. \quad (19)$$

3. Релаксация начального возмущения поверхности жидкости

3.1. Точное решение

Рассмотрим эволюцию начального возмущения поверхности при отсутствии внешней силы и массового потока на границе. В этом случае уравнение (19) принимает вид

$$\partial_t h_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2\mu k} (\sigma k^2 + \rho g) h_{\mathbf{k}} = 0. \quad (20)$$

Интегрируя (20) с начальным условием $h_{\mathbf{k}}|_{t=0} = h_{\mathbf{k}}^0$, получаем

$$h_{\mathbf{k}} = h_{\mathbf{k}}^0 e^{-t/T(k)}, \quad T(k) = \frac{2\mu k}{\sigma k^2 + \rho g}. \quad (21)$$

При $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow \infty$ характерное время затухания $T(k)$ гармоники с волновым числом \mathbf{k} стремится к нулю за счет силы тяжести и поверхностного натяжения соответственно. При $k = k_* = (\rho g / \sigma)^{1/2}$ время затухания приобретает максимальное значение $T_* = \mu / (\rho g \sigma)^{1/2}$. Малое время затухания высокочастотных гармоник означает, что силы поверхностного натяжения приводят к быстрому сглаживанию резких неоднородностей возмущения. С другой стороны, $T|_{k=0} = 0$. Учитывая, что

$$h_{\mathbf{k}}|_{\mathbf{k}=0} = \int h(\mathbf{x}, t) d^2 x \quad (22)$$

представляет собой «объем возмущения», видим, что эта величина, вообще говоря, отличная от нуля для произвольного начального возмущения, мгновенно становится (и в дальнейшем поддерживается) равной нулю за счет действия силы тяжести. Мгновенность этого процесса определяется использованием в расчетах квазистационарного приближения Стокса. Подробное обсуждение этого вопроса смотри в [10].

Возвращаясь к случаю произвольных волновых чисел, проведем анализ эволюции формы возмущения $h(\mathbf{x}, t)$. Для удобства рассмотрения введем безразмерные переменные

$$\tau = t/T_*, \quad \theta = T/T_*, \quad \xi = k_*\mathbf{x}, \quad \kappa = \mathbf{k}/k_*. \quad (23)$$

Тогда (21) приобретает вид

$$h_\kappa = h_\kappa^0 e^{-\tau/\theta(\kappa)}, \quad \theta(\kappa) = \frac{2\kappa}{\kappa^2 + 1}, \quad (24)$$

где

$$h_\kappa = \int e^{-i\kappa\xi} h(\xi, \tau) d^2\xi.$$

Обращая (24) по Фурье, имеем

$$h(\xi, \tau) = \int g(\xi - \xi', \tau) h^0(\xi') d^2\xi', \quad (25)$$

где

$$g(\xi, \tau) = \int e^{i\kappa\xi - \tau/\theta(\kappa)} \frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2}. \quad (26)$$

Выражения (25), (26) позволяют рассчитать форму возмущения в произвольный момент времени по начальной форме возмущения. Для качественного описания релаксации начального возмущения удобно вернуться к исходному выражению (24). Тогда имеем

$$h(\xi, \tau) = \int e^{i\kappa\xi} h_\kappa^0 e^{-\tau/\theta(\kappa)} \frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2}, \quad \theta(\kappa) = \frac{2\kappa}{\kappa^2 + 1}. \quad (27)$$

Из (27) видно, что конфигурация возмущения в момент времени τ определяется Фурье-образом начального возмущения h_κ^0 и множителем $e^{-\tau/\theta(\kappa)}$. Максимальное значение этого множителя равно $e^{-\tau}$ и соответствует $k = 1$. Пусть $k_{1,2}(\tau)$ — значения k , при которых функция $e^{-\tau/\theta(\kappa)}$ принимает значение, в e раз меньшее максимального — см. Рис. 1.

Решая уравнение $\frac{\tau}{\theta(k)} = \tau + 1$, получаем

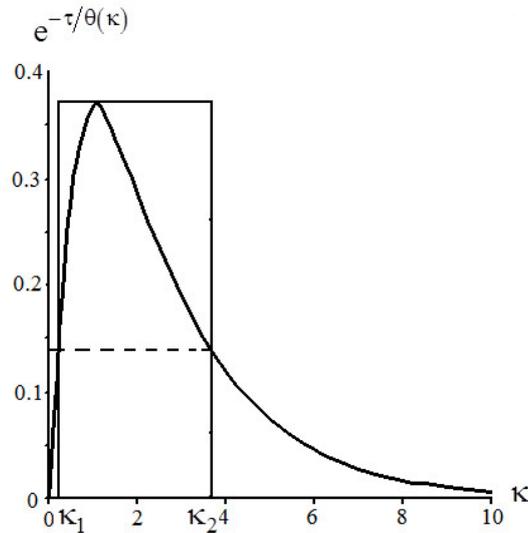


Рис. 1. График функции $e^{-\tau/\theta(\kappa)}$ при $\tau = 1$ и ее аппроксимация ступенчатой функцией

$$\kappa_{1,2} = \frac{1}{\tau} \left(\tau + 1 \pm \sqrt{2\tau + 1} \right). \quad (28)$$

При $\tau \rightarrow 0$, $\kappa_1 = \frac{\tau}{2}$, $\kappa_2 = \frac{2}{\tau}$. При $\tau \rightarrow \infty$, $\kappa_{1,2} = 1 \mp \sqrt{\frac{2}{\tau}}$.

3.2. Качественное описание процесса релаксации возмущения

Для качественной оценки эволюции возмущения заменим функцию $e^{-\tau/\theta(\kappa)}$ на ступенчатую функцию $f(\tau, \kappa)$, равную нулю при $\kappa < \kappa_1(\tau)$ и при $\kappa > \kappa_2(\tau)$. В интервале $\kappa_1(\tau) \leq \kappa \leq \kappa_2(\tau)$ эта функция равна $e^{-\tau}$ — см. Рис. 1.

$$f(\kappa, \tau) = e^{-\tau} \vartheta(\kappa - \kappa_1(\tau)) \vartheta(\kappa_2(\tau) - \kappa),$$

где $\vartheta(x)$ — ϑ -функция Хевисайда.

Возвращаясь к выражению (28) видим, что эволюцию возмущения можно рассматривать как результат обрезания Фурье-образа начального возмущения. Рассматриваемая система ведет себя как своеобразный фильтр, «вырезая» из спектра волновых чисел начального возмущения кольцевую область с характерными размерами $\kappa_1(\tau) \leq |\kappa| \leq \kappa_2(\tau)$. Одновременно амплитуда Фурье-образа возмущения падает как $e^{-\tau}$. Видно, что ширина кольцевой области с течением вращения падает, сначала быстро — в основном за счет уменьшения внешнего радиуса кольца κ_2 , затем медленно — за счет симметричного возрастания κ_1 и убывания κ_2 . При больших временах кольцо локализуется в окрестности окружности радиуса $\kappa = 1$ и имеет характерную ширину $\Delta\kappa = 2\sqrt{\frac{2}{\tau}}$. Указанный процесс фильтрации определяет качественные особенности релаксации начального возмущения.

Пространственная фильтрация Фурье-образа начального возмущения со стороны малых волновых чисел эквивалентна добавлению к нему, с обратным знаком, части, локализованной в круге радиуса κ_1 . Это приводит к вычитанию из начального возмущения соответствующего прообраза по Фурье, локализованного в координатном представлении, в круге радиуса $\xi_1 = \frac{2\pi}{\kappa_1}$. При $\tau \rightarrow 0$, $\xi_1 = \frac{4\pi}{\tau} \rightarrow \infty$. Такое дальноедействующее влияние исходного возмущения определяется действием силы тяжести. Это наглядно видно при переходе и размерным перемещениям: радиус дальноедействующего возмущения $r_1 = \frac{\xi_1}{k_*} = \frac{4\pi\mu}{\rho g t}$. Образно говоря, возмущение тонет в окружающей жидкости, искажая форму ее поверхности на большом расстоянии.

Локализация Фурье-образа возмущения в круге радиуса κ_2 приводит к расширению его внешней границы, в координатном представлении, до окружности радиуса $\xi_2 = \frac{2\pi}{\kappa_2}$.

В размерных переменных $r_2 = \frac{\xi_2}{k_*} = \frac{\pi\sigma t}{\mu}$, т.е. указанный эффект связан с действием сил поверхностного натяжения.

Для оценки значения возмущения в начале координат воспользуемся тем фактом, что

$$h(0, \tau) = \int h_\kappa(\tau) \frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2}.$$

Тогда

$$h(0, \tau) \simeq \int_{\kappa_1(\tau) \leq |\kappa| \leq \kappa_2(\tau)} h_\kappa^0 \frac{d^2 \kappa}{(2\pi)^2}.$$

Сформулированные выше приближенные утверждения основаны на замене реальной функции $e^{-\tau/\theta(\kappa)}$ на ступенчатую. Поэтому можно ожидать лишь приближенного соответствия между описанием, основанном на этих утверждениях, и ходом реального процесса релаксации возмущения.

Рассмотрим подробнее релаксацию возмущений, имеющих различный пространственный масштаб и форму. Для иллюстрации выявляемых качественных закономерностей будем использовать графики, получаемые на основании точного решения (25), (27).

3.3. Релаксация длинноволнового возмущения под действием силы тяжести

Если характерный безразмерный масштаб области, занятой возмущением $L \gg 1$, то Фурье-образ этого возмущения сосредоточен в области с характерным размером $\frac{2\pi}{L} \ll 1$. Релаксация такого возмущения на начальном этапе определяется, в основном, фильтрацией его Фурье-образа со стороны малых волновых чисел, т.е. действием силы тяжести. При этом, как было показано выше, к начальному возмущению добавляется, взятый с обратным знаком, прообраз части Фурье-образа начального возмущения, лежащей в круге радиуса $\kappa_1(\tau)$. В координатном представлении эта добавка сосредоточена в круге радиуса $\xi_1 = 2\pi/\kappa_1(\tau)$ и имеет амплитуду

$$\Delta h(0, \tau) \simeq \int_{|\kappa| \leq \kappa_1(\tau)} h_\kappa^0 \frac{d^2 \kappa}{(2\pi)^2}.$$

На начальной стадии процесса релаксации, когда $\kappa_1 \ll 2\pi/L$, соответственно $\xi_1 \gg L$,

$$\Delta h(0, \tau) \simeq \frac{1}{4\pi} \kappa_1^2(\tau) h_\kappa^0|_{\kappa=0} = \frac{\tau^2}{16\pi} \int h^0(\xi) d^2 \xi.$$

За счет такой длинноволновой добавки исходное возмущение опускается (при положительном объеме возмущения) на $\Delta h(\tau)$, практически без искажения формы. Вне области начального возмущения возникает дополнительное возмущение, имеющее амплитуду $\Delta h(\tau)$ и радиус затухания $\xi_1(\tau)$. При больших временах форма дополнительного возмущения несколько искажается, его радиус уменьшается и становится соизмеримым с размерами начального возмущения. К моменту $\tau_1 = 4\pi/L$, когда $\kappa_1 = 2\pi/L$, процесс релаксации возмущения в основном заканчивается. Для иллюстрации указанных эффектов на Рис. 2,3 представлена релаксация осесимметричного длинноволнового возмущения.

Если характерные размеры начального возмущения в двух взаимно перпендикулярных направлениях сильно различаются, то эволюция такого возмущения, как и в рассматриваемом выше случае, определяется, в основном, действием силы тяжести, однако процесс релаксации происходит несколько сложнее. Отметим, что для возмущения, вытянутого вдоль оси ξ_1 , ($L_1 \gg L_2 \gg 1$) область локализации Фурье-образа имеет обратное соотношение размеров $2\pi/L_1 \ll 2\pi/L_2$. Удаление из спектра возмущения круга радиусом $\kappa_1(\tau) = \frac{\tau}{2}$ приводит, на начальном этапе, к образованию симметричного длинноволнового возмущения радиуса $4\pi/\tau$ и амплитуды $\Delta h = \frac{\tau^2}{16\pi} \int h^0(\xi) d^2 \xi$. На этом этапе различие поперечных масштабов возмущения не сказывается практически на характере его эволюции. Возмущение оседает как целое, причем его амплитуда убывает по закону $h(0, \tau) = h^0(0) - \Delta h(\tau)$.

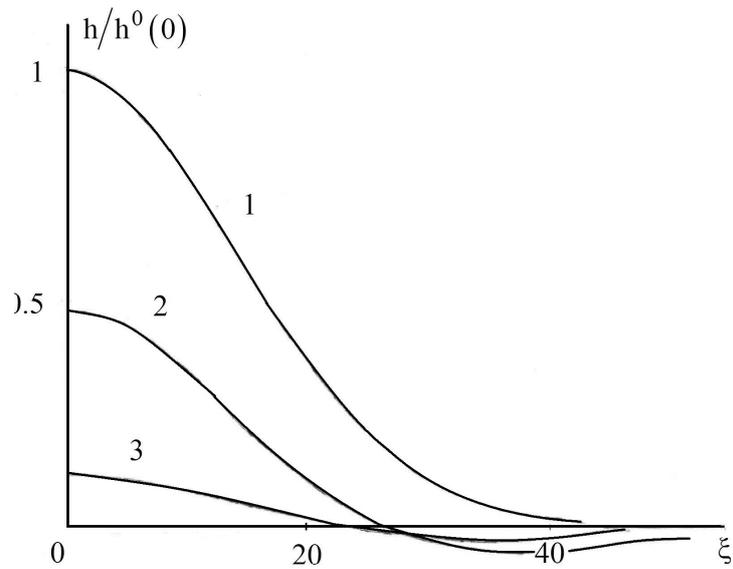


РИС. 2. Релаксация длинноволнового осесимметричного возмущения. Начальная форма возмущения $h_0 = h^0(0) e^{-\xi^2/L^2}$, $L = 20$; 1 — $\tau = 0$; 2 — $\tau = 0, 1$; 3 — $\tau = 0, 6$

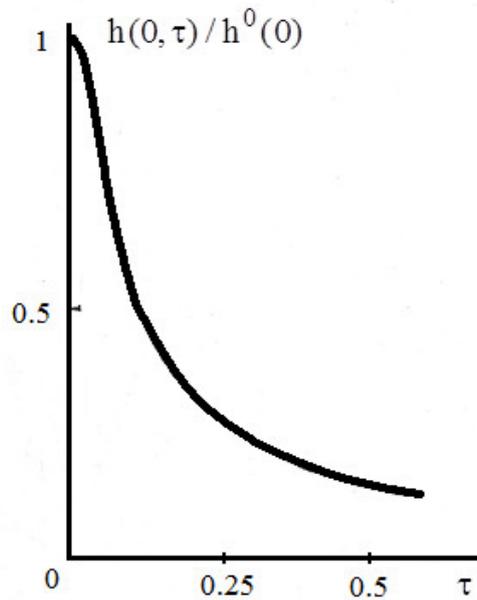


РИС. 3. Убывание амплитуды длинноволнового осесимметричного возмущения. Начальная форма возмущения $h_0 = h^0(0) e^{-\xi^2/L^2}$, $L = 20$

С момента $\tau = 4\pi/L_1$, когда $\kappa_1(\tau) = 2\pi/L_1$, область дальнего влияния возмущения теряет круговую симметрию. В направлении оси ξ_1 ее масштаб ξ_1^* становится, и в дальнейшем поддерживается, равным L_1 , а вдоль оси ξ_2 эта область продолжает сжиматься по закону $\xi_2^* = 4\pi/\tau$. При этом амплитуда возмущения начинает убывать по линейному закону $h(0, \tau) = h^0(0) - \Delta h(\tau)$, $\Delta h = \frac{\tau}{4\pi L_1} \int h^0(\xi) d^2\xi$.

К моменту $\tau = 4\pi/L_2$, когда $\kappa_1(\tau) = 2\pi/L_1$ возмущение практически затухает. На Рис. 4 представлена характерная конфигурация длинноволнового возмущения, масштабы которого по двум осям существенно различаются.

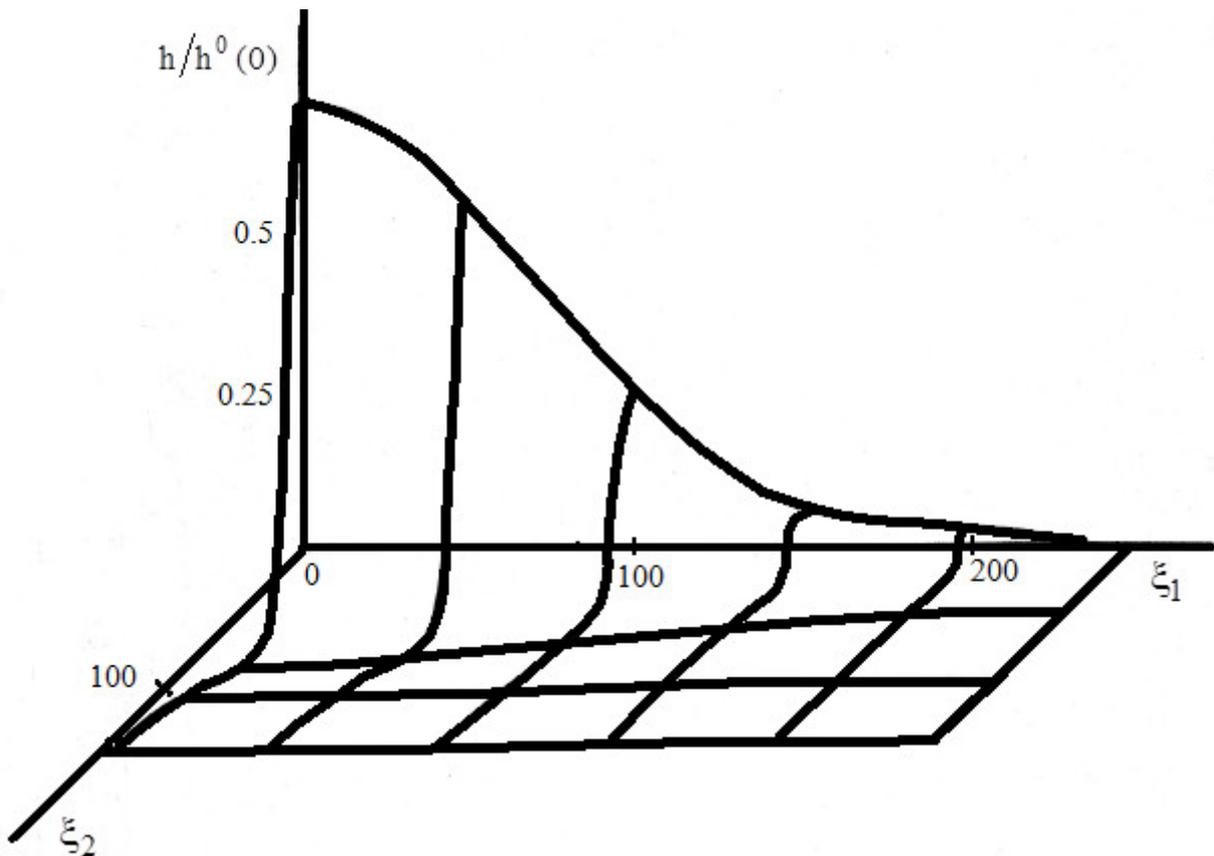


Рис. 4. Конфигурация длинноволнового неосесимметричного возмущения в момент времени $\tau = 0,04$. Начальная форма возмущения $h^0 = h^0(0) \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{L_1^2} - \frac{\xi_2^2}{L_2^2}\right)$, $L_1 = 100$, $L_2 = 20$

3.4. Релаксация коротковолнового возмущения под действием капиллярных сил

Иной характер имеет эволюция возмущения с масштабом $L \ll 1$. Фурье-образ этого возмущения сосредоточен в области с характерным размером $2\pi/L \gg 1$. В этом случае эволюция возмущения на начальной стадии происходит, как и в случае возмущений с большим масштабом, за счет фильтрации его Фурье-образа со стороны малых волновых чисел. Однако, вклад этой области в суммарную амплитуду возмущения мал, и поэтому эффекты оседания возмущения и образования области дальнего влияния, в данном случае, несущественны. Релаксация коротковолнового возмущения определяется, в основном,

действием сил поверхностного натяжения, т.е. фильтрацией его Фурье-образа со стороны больших волновых чисел. Процесс релаксации начинается с момента $\tau = L/\pi$, когда $\kappa_2 = 2\pi/L$. При этом размер области, занятой возмущением, начинает возрастать по закону $\xi(\tau) = 2\pi/\kappa_2 = \pi\tau$, а его амплитуда убывает, на начальной стадии, как $\frac{1}{\pi\tau^2} \int h^0(\xi) d^2\xi$. Характерное время затухания возмущения порядка единицы.

На Рис. 5 представлена релаксация коротковолнового осесимметричного возмущения.

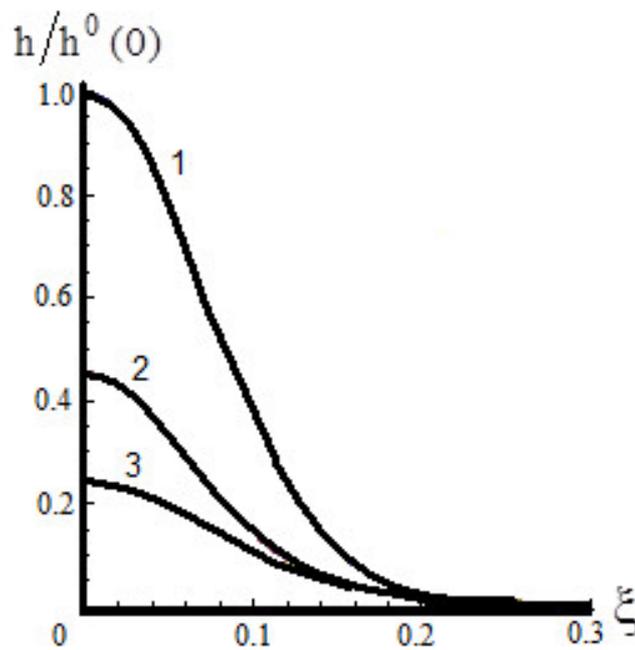


РИС. 5. Релаксация коротковолнового осесимметричного возмущения. Начальная форма возмущения $h_0 = h^0(0) e^{-\xi^2/L^2}$, $L = 0, 1$; 1 — $\tau = 0$; 2 — $\tau = 0, 1$, 3 — $\tau = 0, 2$

Остановимся, наконец, на описании релаксации мелкомасштабного возмущения с существенно различными масштабами вдоль осей ξ_1 и ξ_2 : $L_2 \ll L_1 \ll 1$. Эволюция такого возмущения начинается с момента $\tau = L_2/\pi$, при этом его масштаб в направлении оси ξ_2 начинает возрастать, как $\pi\tau$, а в направлении оси ξ_1 меняется слабо. При этом амплитуда возмущения убывает по закону $h(0, \tau) = \frac{2}{\pi L_1 \tau} \int h^0(\xi) d^2\xi$. С момента $\tau = L_1/\pi$ масштабы возмущения по направлению обеих осей становятся соизмеримыми. С этого момента возмущение становится осесимметричным, а его радиус растет как $\pi\tau$. Амплитуда возмущения при этом падает быстрее, чем на первом этапе: $h(0, \tau) = \frac{1}{\pi\tau^2} \int h^0(\xi) d^2\xi$. Процесс релаксации заканчивается, в основном, к моменту $\tau = 1$. На Рис. 6 представлена картина релаксации коротковолнового неосесимметричного возмущения. Видно, что с течением времени возмущение приобретает осевую симметрию.

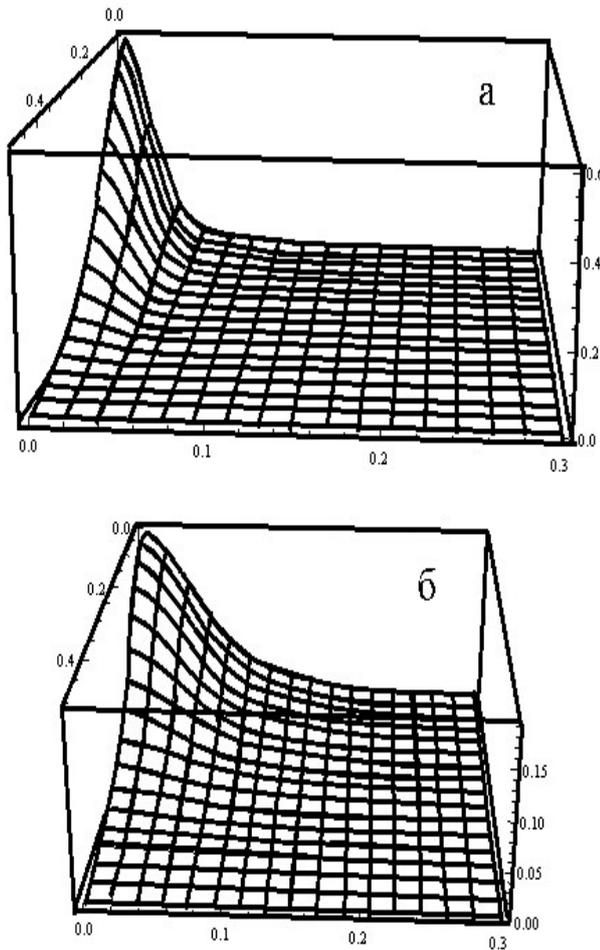


РИС. 6. Конфигурация коротковолнового неосесимметричного возмущения. Начальная форма возмущения $h^0 = h^0(0) \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{L_1^2} - \frac{\xi_2^2}{L_2^2}\right)$, $L_1 = 0,2$; $L_2 = 0,02$; а — $\tau = 0,02$; б — $\tau = 0,2$

4. Заключение

Теоретически исследован процесс релаксации малого возмущения плоской поверхности вязкой несжимаемой жидкости под действием капиллярных и гравитационных сил. Предложен метод качественного анализа конфигурации возмущения, основанный на пространственной фильтрации Фурье-образа исходного возмущения. Показано, что под действием силы тяжести вокруг исходного возмущения возникает дополнительное длинноволновое возмущение, которое обеспечивает нулевой суммарный объем суммарного возмущения. Капиллярные силы приводят к возрастанию размера области, занятой возмущением.

Работа поддержана ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» (контракты НК-526Р, 14.740.11.0879, 16.740.11.0030) и грантом 11-08-00267 РФФИ.

Литература

- [1] Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса — М.: Мир, 1979. — 630 с.
- [2] Френкель Я.И. Вязкое течение в кристаллических телах // ЖЭТФ. — 1946. — Т. 16, № 1. — С. 29–38.

- [3] Tanveer S., Vasconcelos G.L. Bubble Breakup in two-dimensional Stokes flow // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — V. 73, No. 21. — P. 2845–2848.
- [4] Jeong J.-T., Moffatt H.K. Free-surface cusps associated with flow at low Reynolds number // *J. Fluid Mech.* — 1992. — V. 241. — P. 1–22.
- [5] Pozrikidis C. Numerical studies of singularity formation at free surfaces and fluid interfaces in two-dimensional Stokes flow // *J. Fluid Mech.* — 1997. — V. 331. — P. 145–167.
- [6] Hopper R.W. Coalescence of two equal cylinders: exact results for creeping viscous plane flow driven by capillarity // *J. Am. Ceram. Soc.* — 1984. — V. 67, No. 12. — P. 262–264.
- [7] Чивилихин С.А., Гусаров В.В., Попов И.Ю. Течения в наноструктурах: классические и квантовые модели // *Наносистемы: физика, химия, математика.* — 2012. — Т. 3, № 1. — С. 7–26.
- [8] Ламб Г. Гидродинамика — ОГИЗ, Москва, 1947. — 929 с.
- [9] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика — Физматгиз, Москва, 1959. — 700 с.
- [10] Чивилихин С.А. Релаксация малого локального возмущения поверхности вязкой жидкости в приближении Стокса // *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа.* — 1983. — Т. 3. — С. 133–137.