

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СВЕТА ПРИ ПАДЕНИИ ПОД УГЛОМ НА СЛУЧАЙНУЮ СЛОИСТУЮ СИСТЕМУ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИКОВ

А. И. Игнатов¹, А. М. Мерзликин¹, А. П. Виноградов¹

¹Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН

ignatovtoha@gmail.com

PACS 71.23.An, 84.37.+q, 42.25.Fx

В рамках численного эксперимента исследован эффект Брюстера в случайной системе изотропных магнито-диэлектрических слоев. Показано, что если диэлектрическая и магнитная проницаемости случайно меняются от слоя к слою, притом что характеристический импеданс всех слоев одинаков, то индекс Ляпунова (величина обратно пропорциональная длине локализации) растет с углом падения и не зависит от поляризации падающей волны. Это свойство является статистическим, так как в отдельно взятой конечной реализации коэффициенты прохождения для s- и p-поляризованного света различны. Предложено теоретическое объяснение найденного эффекта.

Ключевые слова: андерсоновская локализация света, эффект Брюстера.

1. Введение

Распространение света в гетерогенных (периодических и неупорядоченных) средах — одна из фундаментальных проблем электродинамики, привлекающих большое внимание физиков (см. например обзоры [1-3]). Наиболее интересные явления в таких средах — формирование запрещенных зон и локализация света.

Локализация была предсказана Андерсоном, для случая электронов в твердом теле [4]. Было показано [4], что в любой одномерной неупорядоченной системе электрон всегда локализован. Локализация в данном случае означает, что волновая функция электрона экспоненциально затухает при удалении от центра локализации. Характеристическая длина данного затухания называется длиной локализации L_{loc} .

Уравнения Шредингера и Максвелла могут быть переписаны в виде волнового уравнения. Из этого сходства следует, что в одномерных неупорядоченных системах свет также должен быть локализован [1,2,5-7]. Более того, изучать локализацию на примере электромагнитных волн легче, ввиду отсутствия взаимодействия между фотонами.

Несмотря на сходство уравнений Шредингера и Максвелла локализация света имеет некоторые особенности [1-3,7-9]. Основное отличие заключается в векторной природе электромагнитных волн. В случае наклонного падения коэффициенты отражения для s- и p-поляризованных волн различны, даже для изотропных материалов [10]. Поэтому естественно ожидать, что свойства локализации будут зависеть от поляризации волн [11-12]. Действительно, в [11] показано, что при наклонном падении электромагнитной волны на неупорядоченную систему немагнитных диэлектрических слоев длины локализации существенно отличаются для разных поляризаций. Например, в случае бинарной системы (слои из двух типов материала) при угле падения, соответствующем углу Брюстера для перехода из одного материала в другой наступает делокализация для p-поляризации, тогда как волна s-поляризованная волна локализована при любом угле падения.

Как и в случае электронов, основной характеристикой локализации света является длина локализации, которую можно определить как масштаб длины, на котором коэффициент прохождения t в среднем экспоненциально затухает по мере увеличения толщины системы [1,2,6,11]:

$$L_{loc} = \frac{1}{\gamma} = \lim_{L \rightarrow \infty} (L / \langle \ln |t| \rangle).$$

Здесь также определена величина γ , называемая показателем Ляпунова.

В данной работе рассмотрен общий случай системы, состоящей из магнито-диэлектрических слоев. Отдельное внимание уделено случаю, когда явление Брюстера наблюдается для обеих поляризаций.

2. Явление Брюстера в магнито-диэлектриках

Рассмотрим подробнее падение плоской волны из вакуума под углом α на слоистую структуру. Для заданной поляризации (s или p) задача о падении под углом может быть сведена к задаче о падении по нормали. Действительно, для случая нормального падения (скажем вдоль оси z , см. Рис. 1) уравнения Максвелла в j -ом слое сводятся к волновому уравнению с постоянными коэффициентами $\Delta F + k_0^2 n_j^2 F = 0$ ($F = E, H$) [13], решение которого можно записать в виде:

$$\begin{aligned} E &= A_j e^{ik_0 n_j z} + B_j e^{-ik_0 n_j z} \\ H &= y_j A_j e^{ik_0 n_j z} - y_j B_j e^{-ik_0 n_j z} \end{aligned} \quad (1) \text{ где } k_0 = \frac{\omega}{c}, n_j = \sqrt{\varepsilon_j \mu_j} - \text{показатель преломления } j\text{-го слоя, } y_j = \sqrt{\varepsilon_j / \mu_j} - \text{характеристический адмитанс } j\text{-го слоя.}$$

Для получения окончательного решения необходимо удовлетворить граничным условиям, заключающимся в непрерывности тангенциальных составляющих полей.

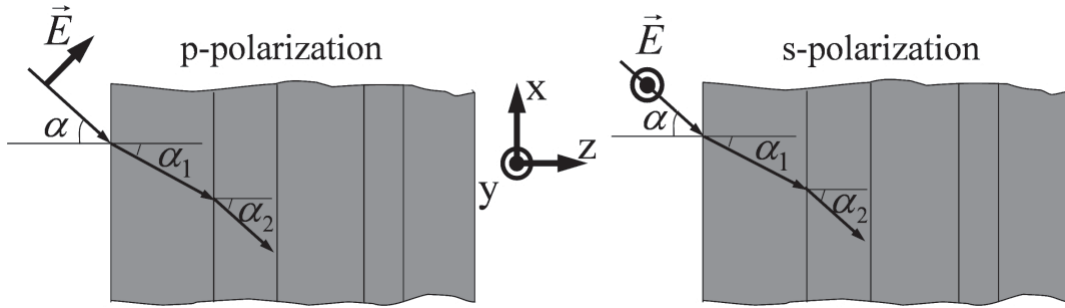


Рис. 1. Падение s- и p-поляризованных волн на слоистую систему

Оказывается, что при падении волны под углом (см. Рис. 1) можно получить систему уравнений только на тангенциальные компоненты полей. Каждая из компонент будет удовлетворять волновому уравнению $\Delta F + k_0^2 \varepsilon_j \mu_j \cos^2 \alpha_j F = 0$ [13] (здесь α_j — угол распространения в j -том слое), а решение запишется в виде (1) (появится лишь дополнительный несущественный множитель $e^{ik_{\parallel} x}$, который мы далее будем опускать, k_{\parallel} — тангенциальная составляющая волнового вектора), с тем отличием, что характеристические адмитансы y_j нужно заменить на «поверхностные» с учетом поляризации [14]:

$$(Y_j)_s = \frac{H_{\parallel}}{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j} \frac{k_{zj}}{k_j}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} \cos \alpha_j \quad (1)$$

$$(Y_j)_p = \frac{H}{E_{\parallel}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j} \frac{k_j}{k_{zj}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} \frac{1}{\cos \alpha_j}. \quad (2)$$

а показатель преломления — на

$$(n_j)_s = (n_j)_p = \sqrt{\varepsilon_j \mu_j} \cos \alpha_j \quad (3)$$

Отметим, что, в отличие от падения по нормали, поверхностный адмитанс вакуумного слоя Y_v не равен единице и различен для s- и p-поляризации:

$$(Y_v)_s = \cos \alpha, \quad (Y_v)_p = 1/\cos \alpha \quad (4)$$

В случае нормального падения ($\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$) поля имеют только тангенциальные компоненты, а поверхностный импеданс совпадает с характеристическим.

Уравнение для нахождения угла Брюстера [10,13]

$$\frac{k_{\parallel}}{\sqrt{\varepsilon_1 k_0^2 - k_{\parallel}^2}} = \tan(\alpha) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

можно переписать как равенство поверхностных адмитансов p-поляризованной волны для соседних слоев

$$(Y_1(\alpha))_p = (Y_2(\alpha))_p.$$

Из равенства адмитансов слов для p-поляризованной волны следует, что в двухкомпонентной смеси для p-поляризованного света наблюдается делокализация — свет распространяется без отражений от границ слоев [13]. При этом для s-поляризованной волны никакие значения угла падения не приводят к равенству адмитансов

$$(Y_1)_s = \sqrt{\varepsilon_1 - \left(\frac{k_{\parallel}}{k_0}\right)^2} \neq \sqrt{\varepsilon_2 - \left(\frac{k_{\parallel}}{k_0}\right)^2} = (Y_2)_s$$

Это неравенство выражает известный факт, что в немагнитных диэлектриках угол Брюстера существует только для p-поляризованного света. Однако если мы рассмотрим магнитные материалы ($\mu_j \neq 1$), то функциональная зависимость адмитанса от k_{\parallel} усложняется, и оказывается, что угол Брюстера может существовать как для p-, так и для s-поляризованного света [15]. На границе раздела двух сред с проницаемостями ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2 выражения для углов Брюстера будут определяться из систем:

Для s-поляризации Для p-поляризации

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_2 \\ \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \alpha_1 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sin \alpha_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} \frac{1}{\cos \alpha_1}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \frac{1}{\cos \alpha_2}} \\ \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \alpha_1 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \sin \alpha_2 \end{cases} \quad (5)$$

В частности, когда характеристический адмитанс всех слоев одинаков, угол Брюстера совпадает с нормалью ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) и реализуется для всех поляризаций сразу.

3. Распространение электромагнитных волн в случайной магнито-диэлектрической слоистой системе

Для описания распространения волн в слоистой среде был использован формализм T -матриц (см. [10,16]). Введем между каждыми двумя слоями слой вакуума нулевой толщины. T -матрица такого слоя равна единичной, так что T -матрица всей системы не изменится. Это позволяет ввести независимую T -матрицу каждого слоя [16]:

$$\mathbf{T}_j = \begin{pmatrix} \cos \rho_j + \frac{i}{2} \left(\frac{Y_v}{Y_j} + \frac{Y_j}{Y_v} \right) \sin \rho_j & -\frac{i}{2} \left(\frac{Y_v}{Y_j} - \frac{Y_j}{Y_v} \right) \sin \rho_j \\ \frac{i}{2} \left(\frac{Y_v}{Y_j} - \frac{Y_j}{Y_v} \right) \sin \rho_j & \cos \rho_j - \frac{i}{2} \left(\frac{Y_v}{Y_j} + \frac{Y_j}{Y_v} \right) \sin \rho_j \end{pmatrix}$$

где $\rho_j = k_0 n_j d_j$, d_j — толщина j -го слоя, а выражения для поверхностных адмитансов вакуума Y_v и слоя Y_j берутся из (2a) или (2b) в соответствии с поляризацией.

В случае, когда магнитная проницаемость слоев одинакова для р-поляризованной волны существует угол делокализации, равный углу Брюстера при переходе из одного слоя в другой (3) [11]. При этом для s-поляризованной волны индекс Ляпунова γ возрастает с углом. Последнее связано с ростом контраста поверхностных адмитансов при увеличении угла (см. (2)).

Если диэлектрическая проницаемость слоев одинакова, а магнитная различна, следует ожидать противоположной ситуации — для s-поляризованной волны существует угол делокализации, а для р-поляризованной волны γ лишь возрастает с углом. Угол делокализации в этом случае совпадает с углом Брюстера для s-поляризованной волны в магнитных слоях (3). Действительно, это следует из инвариантности системы уравнений Максвелла относительно замены местами ε на μ , замены E на H , а H - на $-E$.

В случае же равных характеристических адмитансов всех слоев угол Брюстера реализуется и для s-поляризованной, и для р-поляризованной волн. При этом угол Брюстера равен нулю (случай нормального падения).

Рассмотрим подробнее локализацию в такой системе. Для падения по нормали ($\alpha = 0$) численный эксперимент (см. Рис. 2) подтверждает очевидное предсказание об отсутствии локализации для обеих поляризаций одновременно

$$\gamma_s = \gamma_p = 0.$$

При падении под углом индексы Ляпунова для различных поляризаций отличны от нуля. Однако выявился неожиданный факт: с точностью до ошибки эксперимента индексы Ляпунова для s- и р- поляризаций равны:

$$\gamma_s = \gamma_p \tag{6}$$

Совпадение индексов Ляпунова для разных поляризаций кажется удивительным, так как в отдельной реализации коэффициенты прохождения для s- и р- поляризованных волн, безусловно, разные (см. Рис 3).

Рассмотрим подробнее это явление. T -матрица всей системы \mathbf{T} :

$\mathbf{T} = \mathbf{T}_N \mathbf{T}_{N-1} \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$ (5) где \mathbf{T}_j — матрица j -го слоя. Будем использовать представление T -матрицы в виде

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{B}_j \mathbf{A}_j \mathbf{B}_j^{-1},$$

где матрица \mathbf{A}_j зависит от поляризации только через $\cos \alpha_j$, а \mathbf{B}_j — только через $Y_v(\alpha)$.

Например, для s-поляризованной волны

$$\mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} \cos \rho_j + \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha_j} + \cos \alpha_j \right) \sin \rho_j & \frac{i}{2} \left(\cos \alpha_j - \frac{1}{\cos \alpha_j} \right) \sin \rho_j \\ \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha_j} - \cos \alpha_j \right) \sin \rho_j & \cos \rho_j - \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha_j} + \cos \alpha_j \right) \sin \rho_j \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} Y_v + \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} & Y_v - \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} \\ Y_v - \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} & Y_v + \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}} \end{pmatrix}.$$

Т.к. характеристические адмитансы всех слоев одинаковы, то \mathbf{B}_j не зависит от j , но зависит от поляризации. В этом случае соотношение (5) можно переписать в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{B} \mathbf{A}_N \mathbf{A}_{N-1} \dots \mathbf{A}_1 \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1}. \tag{7}$$

Т.к. матрица \mathbf{B} конечна и не зависят от толщины или реализации случайной системы, то длина локализации будет определяться только матрицей \mathbf{A} .

Матрицы \mathbf{A}_j имеют вид T -матриц при падении по нормали из вакуума на слои с оптическими толщинами ρ_j и адмитансами слоев $\cos \alpha_j$. Таким образом, для s-поляризованной

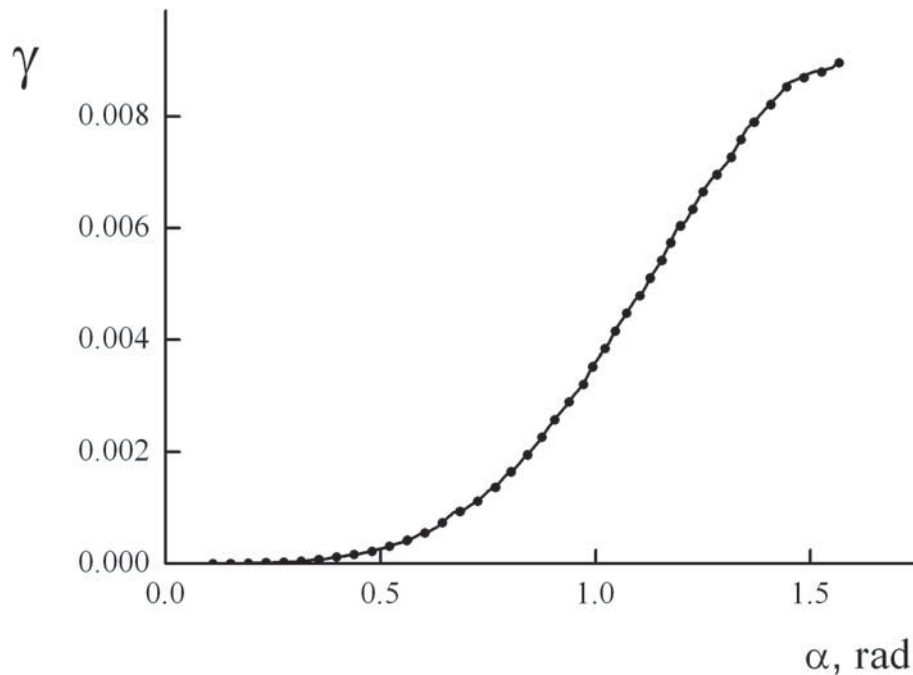


РИС. 2. Зависимость γ (нормированного на среднюю толщину слоев d) от угла падения α на двухкомпонентную систему при фиксированной частоте $k_0 d = 1.0$. Проницаемости первого и второго материалов, соответственно, $\varepsilon_1 = 2$, $\mu_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 15$, $\mu_2 = 7.5$. Слои из первого и второго материала случайно перемешаны, и их толщины равномерно распределены в интервале от $0.8d$ до $1.2d$. Сплошная кривая — для s-поляризации, точечная кривая — для p

волны мы можем перейти от рассмотрения задачи падения под углом к модельной задаче падения по нормали на слои с адмитансами слоев $\cos \alpha_j$.

Аналогично для p-поляризованной волны мы также можем перейти от задачи падения под углом к другой модельной задаче для падения по нормали. Единственное отличие — в соответствии с (2b) роль адмитансов будут играть не $\cos \alpha_j$, а $1/\cos \alpha_j$.

Заметим, что при падении по нормали, если мы поменяем местами ε и μ , то коэффициент прохождения через любую систему не изменится. Действительно в этом случае в уравнениях Максвелла поля E заменятся на H , а H — на $-E$. Следовательно, при замене Y на $1/Y$ коэффициент прохождения не меняется. Поэтому в наших модельных системах коэффициент прохождения одинаков и длина локализации одинакова. Таким образом, длина локализации одинакова для s- и p-поляризованных волн.

Отметим, что хотя коэффициент прохождения в модельных системах одинаков, коэффициенты отражения для двух модельных систем отличаются знаками. Таким образом, матрицы A для разных поляризаций различны. Кроме того, матрицы B для s- и p-поляризованных волн также различны, поэтому коэффициенты прохождения через исходную систему для s- и p-поляризованных волн при падении под углом в общем случае также оказываются разными, что не мешает равенству длин локализации.

4. Заключение

Показано, что в системе слоев с одинаковым характеристическим адмитансом может наблюдаться андерсоновская локализации света при падении под углом, что проявляется

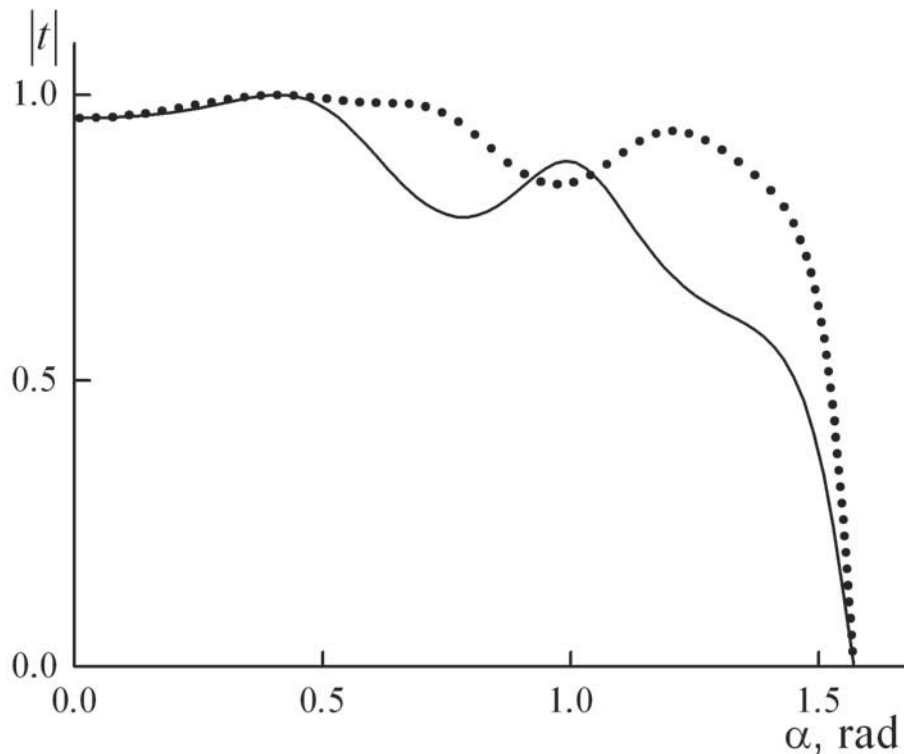


Рис. 3. Коэффициент прохождения для s- (сплошная кривая) и p- (точечная кривая) поляризованных волн через систему из 30-ти слоев как функция угла падения из вакуума. Параметры системы как на рис. 2

в экспоненциальном спадении коэффициента прохождения с толщиной. Масштаб этого экспоненциального спадения — длина локализации — не зависит от поляризации, несмотря на то, что в отдельной реализации коэффициент прохождения различен для разных поляризаций. Заметим, что в недавно вышедшей работе [17], посвященной локализации в слоистой системе, содержащей метаматериалы, при падении под углом приведена формула Израилева-Макарова (ИМ) [7], модифицированная для случая падения под углом. Данная формула дает аналитическое выражение для длины локализации в случае двухкомпонентной системы и справедлива для слабонеупорядоченных систем. Результаты настоящей статьи находятся в согласии с модифицированной формулой ИМ, но справедливы также и в случае сильно неупорядоченных систем, для которых формула ИМ, в общем случае, неверна.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №09-02-92484, №10-02-90466 и №08-02-00874).

Литература

- [1] Soukoulis C.M. (ed.) Photonic Crystals and Light Localization in the 21th Century. Kluwer, Dordrecht, 2001, 605 p.
- [2] Sheng P. Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena. 2nd ed. Springer, Berlin, 2006, 333 p.
- [3] Shalaev V. V. (ed.) Optical properties of Nanostructured Random Media. Berlin, Springer, 2010.
- [4] Anderson P. W. Absence of diffusion in certain random lattices // Phys. Rev., 1958, 109 (5), 1492-1505.

- [5] John S. Electromagnetic absorption in a disordered medium near a photon mobility edge // *Phys. Rev. Lett.*, 1984, 53(22), 2169-2172.
- [6] Furstenberg H. Noncommuting random products // *Trans. Am. Math. Soc.*, 1963, 108(3), 377-428.
- [7] Izrailev F. M., Makarov N.M. Localization in correlated bilayer structures: from photonic crystals to metamaterials and semiconductor superlattices // *Phys. Rev. Lett.*, 2009, 102(20), 203901.
- [8] Merzlikin A. M., Levy M., Jalali A. A., Vinogradov A. P. Polarization degeneracy at Bragg reflectance in magnetized photonic crystals // *Phys. Rev. B*, 2009, 79(19), 195103.
- [9] Merzlikin A. M., Vinogradov A. P., Dorofeenko A. V., Inoue M., Levy M., Granovsky A. B. Controllable Tamm states in magnetophotonic crystal // *Physica B*, 2007, 394(2), 277-280.
- [10] Born M., Wolf E. Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7th ed., Cambridge University Press, 1999.
- [11] Sipe J. E., Sheng P., White B. S., Cohen M. H. Brewster anomalies: a polarization-induced delocalization effect // *Phys. Rev. Lett.*, 1988, 60(2), 108.
- [12] Du Xu, Zhang Dongxiang, Zhang Xiulan, Feng Baohua, Zhang Daozhong. Localization and delocalization of light under oblique incidence // *Phys. Rev. B.*, 1997, 56(1), 28-31.
- [13] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Электродинамика сплошных сред. Курс теоретической физики, т. 8, изд. 5., М.: Физматлит, 2001, 656 с.
- [14] Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973, 343 с.
- [15] Веселаго В. Г. Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления // *УФН*, 2003, 173(7), 790-794.
- [16] Виноградов А. П., Мерзликин А. М. К вопросу о гомогенизации одномерных систем // *ЖЭТФ*, 2002, 121(3), 565-572.
- [17] Mogilevtsev D., Pinheiro F. A., dos Santos R. R., Cavalcanti S. B., Oliveira L. E. Suppression of Anderson localization of light and Brewster anomalies in disordered superlattices containing a dispersive metamaterial // *PRB*, 2010, 82(8), 081105(R).