

ПЛОТНОСТЬ ФОТОННЫХ СОСТОЯНИЙ В ОПТИЧЕСКИХ НАНОМАТЕРИАЛАХ И УПРАВЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ УРОВНЯМИ АТОМОВ

Р. Х. Гайнутдинов¹, М. А. Хамадеев¹, Е. В. Зайцева¹, М. Х. Салахов¹

¹Казанский университет, Казань, Россия

Renat.Gainutdinov@ksu.ru

Обсуждается влияние среды оптических наноматериалов на характер взаимодействия атомов с собственным полем излучения на примере фотонных кристаллов. В работе показано, что такое влияние может приводить к изменению энергетических уровней атомов, помещенных в периодические диэлектрические среды нанометрового размера.

Ключевые слова: плотность состояний, фотонные кристаллы, сдвиг энергетических уровней.

1. Введение

Развитие современной физики уже кажется немислимым без прогресса в области создания наноматериалов. На сегодняшний день для изучения представлен огромный их класс. Принципиальной новизной является то, что создание структур в нанометровом масштабе позволило выйти за рамки привычной физики, которая до этого ограничивалась лишь объемными материалами. В данном контексте особый интерес представляет исследование фотонных кристаллов. Фотонные кристаллы — это материалы, структура которых характеризуется периодическим изменением показателя преломления (период составляет порядка нескольких сотен нанометров) в пространственных направлениях [1,2]. Их важной особенностью является то, что такая периодичность приводит к отличию дисперсионных соотношений для фотона от случая вакуума и, как следствие, к возникновению зонной структуры с фотонными запрещенными зонами. Под дисперсионными соотношениями понимается зависимость частоты фотона от его волнового вектора. Хорошо известно, что дисперсионные соотношения тесно связаны с функцией плотности электромагнитных состояний, и, благодаря наличию фотонных запрещенных зон, она имеет сложный вид и испытывает резкий скачок на границах запрещенных зон в фотонных кристаллах. Это открывает дорогу к исследованию таких новых оптических эффектов как фотон-атомное связанное состояние [2], спектральное расщепление линий [3] или когерентный контроль за спонтанным излучением [4]. В данной работе показано, что среда фотонных кристаллов существенно влияет на характер взаимодействия атомных электронов с собственным полем излучения, и это приводит к тому, что при таких условиях происходит дополнительный сдвиг энергетических уровней нового типа, который не сводится к обычному лэмбовскому сдвигу.

2. Плотность электромагнитных состояний

Важной характеристикой излучения является функция локальной плотности электромагнитных состояний (local density of states, LDOS), которая является главной величиной, определяющей динамику излучения в структурированной диэлектрической среде [5,6]. Понятие трехмерной функции локальной плотности состояний применимо к реальным излучателям, таким, как атомы и квантовые точки, в то время как двумерная функция

локальной плотности состояний применима к случаю линейного протяженного источника. Локальная плотность состояний определяется как [7]

$$N(r, \omega) = \sum_n \int_{BZ} d^3k |E_{n,k}(r)|^2 \delta(\omega - \omega_n(\mathbf{k})), \quad (1)$$

где $E_{n,k}(\mathbf{r})$ — функция Блоха для волнового вектора Блоха \mathbf{k} на n -ой зонной поверхности, нормированная на единичный объем, $E_{n,k}(r) = \sum_{\mathbf{g}} E_{n,k}(\mathbf{g}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{g})\cdot\mathbf{r}}$, \mathbf{g} — вектора обратной решетки. Поведение фотонов в фотонном кристалле будет подчинено уравнениям для соответствующих квантовополевых операторов. Однако известно, что эти уравнения эквивалентны классическим уравнениям Максвелла. Поэтому можно использовать решение классической задачи, трактуя его как волновую функцию фотона в фотонном кристалле. Функция $N(\mathbf{r}, \omega)$ описывает модовый состав излучения в отдельной точке.

В физике твердого тела чаще используется пространственно независимая функция плотности состояний, в то время как по отношению к фотонным кристаллам она применима лишь при описании ограниченного числа экспериментов, в которых атомы, помещенные в фотонный кристалл, распределены равномерно по элементарной ячейке. Однако плотность состояний более тесно связана с зонной структурой периодической среды, чем локальная плотность состояний [8], поэтому она полезна при теоретическом описании процессов в фотонных кристаллах.

Функция плотности состояний определяется следующим образом:

$$N(\omega) = \sum_n \int_{BZ} d^3k \delta(\omega - \omega_n(\mathbf{k})) \quad (2)$$

Функция плотности состояний и функция локальной плотности состояний связаны между собой как

$$N(\omega) = \int_u d^3r n^2(\mathbf{r}) N(\mathbf{r}, \omega) \quad (3)$$

Из формулы (2) видно, что в зависимости от изменения $\omega(\mathbf{k})$ функция $N(\omega)$ также будет сильно меняться при различных значениях частоты. А это значит, что управляя параметрами фотонного кристалла, можно изменять и формировать плотность состояний. Стоит отметить, что $N(\mathbf{r}, \omega)$ и $N(\omega)$, как правило, задаются для каждой из двух возможных поляризаций (обычно рассматривают ТЕ и ТМ поляризации) отдельно.

Понятие плотности состояний играет важнейшую роль в описании свойств излучения в фотонном кристалле. С провалами в плотности состояний связаны такие интересные эффекты как подавление спонтанного излучения, сильная локализация фотона, немарковость в фотон-атомном взаимодействии и разнообразные коллективные эффекты. Спектры пропускания и поглощения света через фотонные кристаллы не могут дать нам детальную информацию о дисперсионных соотношениях. Однако они имеют тесную связь с числом состояний, для которых разрешено распространение в выбранном направлении. Интегрирование этого числа по всем направлениям для выбранного образца даст нам полную плотность состояний. Когда же речь заходит об экспериментах, связанных с квантовой электродинамикой (КЭД) в фотонных кристаллах, таких, например, как измерение спонтанного излучения или лэмбовского сдвига, нам необходимо учитывать месторасположение излучателя в ячейке. От выбора того, в каком именно месте ячейки следует поместить атом, молекулу или квантовую точку, может зависеть успех эксперимента. Специфика такой пространственной зависимости взаимодействия отражается в локальной плотности состояний.

В общем случае функция плотности состояний может выглядеть достаточно сложно. Однако всегда, когда фотонный кристалл обладает запрещенной зоной, соответствующая

плотность состояний будет иметь провал. Наиболее простой моделью функции плотности состояний, используемой в литературе, является изотропная модель [1, 2, 3, 9]. Ее суть состоит в том, что в дисперсионных соотношениях фотона пренебрегается зависимостью от углов. В результате задача из трехмерной становится одномерной. В случае изотропной модели дисперсионные соотношения фотона выбираются следующим образом [1]:

$$4n \cos(kL) = (1 + n)^2 \cos((2na + b)\omega_k) - (1 - n)^2 \cos((2na - b)\omega_k) \quad (4)$$

где n — показатель преломления одного из слоев фотонного кристалла с толщиной $2a$, в качестве второго слоя выбирается воздух с $n_{air} = 1$, $L = 2a + b$ — постоянная решетки. Здесь и далее используется естественная система единиц, в которой $\hbar = c = 1$. Выражение для плотности состояний в изотропном случае будет выглядеть следующим образом

$$N(\omega) = 2 \sum_n \int k^2 dk \delta(\omega - \omega_{kn}) = \frac{2\omega^2}{d\omega/dk} \quad (5)$$

Зная состояния фотонов в фотонном кристалле, можно описывать процессы взаимодействия связанных и свободных электронов с собственным полем излучения. Дело в том, что при описании спектров излучения атомов в фотонных кристаллах это играет существенную роль. Такие процессы, которые, в частности, приводят к лэмбовскому сдвигу спектральных линий атомов, должны быть очень существенными при частотах виртуальных фотонов в области запрещенной зоны из-за пленения излучения соответствующей частоты. Однако при описании процессов взаимодействия атомов с собственным полем излучения необходимо учитывать вклады всех виртуальных фотонов. При этом мы сталкиваемся с обычной проблемой КЭД: мы не можем ограничиться конечной областью частот и, более того, вклад от процессов с участием виртуальных фотонов с произвольно большими частотами является бесконечным. Это так называемые ультрафиолетовые расходимости. В КЭД эта проблема решается с помощью перенормировки, в результате которой интегралы по импульсам становятся конечными. Это означает, что перенормировка подавляет вклады от виртуальных фотонов с энергиями ω больше некоторой характерной энергии. Физически это соответствует тому, что бесконечные величины включаются в перенормировку массы и прибавляются к затравочной массе m_0 , а наблюдению подлежит только сумма этих двух вкладов.

3. Квантовая электродинамика связанных состояний

Проиллюстрируем принцип перенормировки на задаче о лэмбовском сдвиге. В лидирующем порядке теории возмущения сдвиг энергии атома в вакууме будет определяться вкладом от диаграммы, на которой электрон испускает и поглощает виртуальный фотон. Однако выражение, соответствующее данной диаграмме, расходится. Чтобы обойти эту трудность, принято разделять его на две части

$$\Delta E_n = \Delta E_n^< + \Delta E_n^> \quad (6)$$

где $\Delta E_n^>$ и $\Delta E_n^<$ — высоко- и низкоэнергетические части лэмбовского сдвига. Параметр разделения должен удовлетворять следующим условиям $(Z\alpha)^2 m_e \ll k_{\min} \ll (Z\alpha) m_e$. Согласно второму порядку теории возмущений низкоэнергетическая часть сдвига энергии, обусловленная тем, что электрон в состоянии n испустит и вновь поглотит фотон, равна

$$\Delta E_n^< = e^2 \int_0^{k_{\min}} \frac{d^3 k}{2k(2\pi)^3} \sum_{m,\varepsilon} \frac{\langle n | \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} | m \rangle \langle m | \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} | n \rangle}{E_n - k - E_m} \quad (7)$$

где суммирование проводится по поперечным поляризациям фотона и по всем электронным состояниям. Воспользуемся далее дипольным приближением. Электронные состояния являются нерелятивистскими, поэтому α можно заменить на $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$. Тогда, можно провести интегрирование по \mathbf{k} , которое дает

$$\Delta E_n^< = \frac{2\alpha}{3} \left[-k_{\min} \langle n | \mathbf{v}^2 | n \rangle + \sum_m \frac{E_m - E_n}{m^2} \ln \frac{|E_m - E_n + k_{\min}|}{|E_m - E_n|} |\langle n | \mathbf{p}^2 | m \rangle|^2 \right] \quad (8)$$

Теперь для этой части вычислений необходимо провести перенормировку массы. Поскольку электромагнитная масса электрона δm уже содержится в его экспериментальной массе m , в гамильтониане появится массовый член вида

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2(m - \delta m)} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{p}}{m} \right)^2 \delta m \quad (9)$$

Он приводит к сдвигу энергии

$$\delta E_n = \frac{1}{2} \delta m \langle n | \mathbf{v}^2 | n \rangle \quad (10)$$

который имеет ту же структуру, что и первый член в (8). Поэтому последний включается в перенормировку массы. Учитывая, что $k_{\min} \gg E_n - E_m$, для нерелятивистской части лэмбовского сдвига получаем

$$\Delta E_n^< = \frac{2\alpha}{3m_e^2} \sum_m (E_m - E_n) \ln \frac{k_{\min}}{|E_m - E_n|} |\langle n | \mathbf{p}^2 | m \rangle|^2 \quad (11)$$

Зависимость от k_{\min} компенсируется аналогичной зависимостью в высокоэнергетической части $\Delta E_n^>$. В результате лэмбовский сдвиг определяется формулой

$$\Delta E_n = \frac{4\alpha(Z\alpha)^4}{3\pi n^3} \left(\ln \frac{m_e}{2\bar{E}} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) m_e \quad (12)$$

где \bar{E} — константа, впервые вычисленная Бете [10]. С большой точностью данный результат совпадает с лэмбовским сдвигом, полученным Бете подстановкой $k_{\min} = m_e$ в качестве параметра обрезания в выражение для низкоэнергетической части $\Delta E_n^<$.

Точно такой же прием используется для расчетов лэмбовского сдвига в случае атомов, помещенных в фотонный кристалл [1,2,5,11]. В качестве обоснования авторы всех работ ссылаются на аргументы Бете о том, что при энергиях фотона больших, чем масса электрона, он перестает взаимодействовать с релятивистской структурой электронного волнового пакета. Это подстановка является формальным приемом и не имеет физического смысла. Использование этого приема в фотонных кристаллах приводит к неправильным результатам. При вычислении лэмбовского сдвига логарифмическая расходимость в низкоэнергетической части не полностью компенсируется соответствующей расходимостью в высокоэнергетической части. Кроме того, массовый член в стандартном гамильтониане, который в случае атомов в вакууме компенсирует часть лэмбовского сдвига, описывающую вклад в массу электрона, не делает этого в случае атомов в фотонном кристалле. Поэтому остается член, который имеет ту же структуру, что и собственно-энергетический вклад

$$\delta E_{pc} = -\frac{\alpha}{6\pi^2} \int_0^\infty d^3k \left(\frac{1}{\omega^2(\mathbf{k})} - \frac{1}{k^2} \right) \langle n | \mathbf{v}^2 | n \rangle \quad (13)$$

4. Собственно-энергетический сдвиг энергетических уровней атомов, помещенных в фотонные кристаллы

Поправка к сдвигу энергетических уровней, вносимая фотоннокристаллическим окружением атома благодаря нетривиальным дисперсионным соотношениям, описывается выражением (13). Однако следует помнить, что дисперсионные соотношения являются сложной многолистной функцией комплексной переменной. Именно мнимая компонента волнового вектора подавляет распространение света и формирует связанное состояние фотона с излучающим атомом. Кроме того, необходимо помнить, что в периодических диэлектрических средах волновые функции фотонов имеют блоховскую структуру, что не учитывается в (13). Чтобы исправить этот недостаток, необходимо описать собственную энергию электрона в фотонном кристалле на языке блоховских функций. Используя их, для электрона с импульсом \mathbf{p} можно записать

$$\Delta E_{pc} = \langle \mathbf{p} | H_I G_0 H_I | \mathbf{p} \rangle = \sum_{\mathbf{g}} \sum_{kn} \frac{\langle \mathbf{p} | H_I | \mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{g}, kn \rangle \langle \mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{g}, kn | H_I | \mathbf{p} \rangle}{\mathbf{p}^2/2m - \{(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{g})^2/2m + \omega_n(\mathbf{k})\}} \quad (14)$$

Здесь H_I — оператор взаимодействия в базисе блоховских состояний [9]

$$H_I = -\frac{e}{m} \sum_{kn} \sqrt{\frac{1}{2V\omega_n(\mathbf{k})}} \{a_{kn} E_{kn}(\mathbf{r}_e) + a_{kn}^+ E_{kn}^*(\mathbf{r}_e)\} \cdot \mathbf{p} \quad (15)$$

где V — объем образца. Следует отметить, что благодаря периодичности фотонного кристалла, оператор H_I обладает ненулевыми матричными элементами при всех \mathbf{g} . Однако, при увеличении \mathbf{g} матричные элементы убывают очень быстро [9]. В связи с этим, для грубой оценки эффекта возможно пренебречь членами с $\mathbf{g} \neq 0$. В нерелятивистском пределе справедливо

$$\Delta E_{pc} \approx -\frac{\alpha^2}{2m^2V} \sum_{kn} \frac{|\overline{E_{kn}(\mathbf{r}_e) \cdot \mathbf{p}}|^2}{\omega_n^2(\mathbf{k})} \quad (16)$$

где надчеркивание обозначает матричный элемент от соответствующих состояний. Используя выражение (1) и учитывая, что импульс электрона ориентирован в пространстве случайным образом, мы можем в формуле (16) перейти к локальной плотности состояний, а затем провести усреднение по положению атома в ячейке Вигнера-Зейца, и вместо функции локальной плотности состояний можно использовать плотность состояний $N(\omega)$. Разумеется, это усреднение не точное, но оно позволяет оценить порядок исследуемого эффекта. Тогда выражения (16) может быть переписано в виде

$$\Delta E_{pc} \approx -\frac{p^2 \alpha^2}{6m^2} \int d\omega \frac{N(\omega)}{\omega^2} \quad (17)$$

Вычитая из (17) аналогичный вклад в собственную энергию электрона в вакууме, мы получим поправку к энергетическим уровням нового типа, которая не сводится к обычному лэмбовскому сдвигу.

$$\delta E_{pc} = \Delta E_{pc} - \Delta E_{vac}. \quad (18)$$

Для того чтобы оценить предсказываемый эффект, рассмотрим простую модель фотонного кристалла с изотропными дисперсионными соотношениями (4) и соответствующей плотностью состояний (5). Несмотря на простоту такой модели, она позволяет легко понять суть эффекта. При интегрировании в (18) мы сталкиваемся с линейной расходимостью. Это легко проследить с помощью выражения (13). Интеграл в этом выражении линейно расходится, так как второй член в (13) расходится как $k \cdot 2\alpha^3/3\pi$, а первый как $kn_{eff}^2 \cdot 2\alpha^3/3\pi$, где n_{eff} — это показатель преломления эффективной однородной среды, соответствующей

фотонному кристаллу. Однако если учесть, что при больших энергиях фотона n_{eff} будет близок к единице, это приведет к сходимости в выражении (18).

Зависимость показателя преломления от энергии фотона называется дисперсией. В литературе принято учитывать этот факт простым обрезанием дисперсионной зависимости при определенных энергиях фотона [8,11]. В качестве обоснования авторы всех работ констатируют тот факт, что мы должны ограничиться только оптическим диапазоном. Разумеется, точной границы не существует, поэтому принято выбирать некий характерный параметр обрезания, служащий такой условной границей. Однако разные авторы выбирают этот параметр по-разному. Так, например, авторы работы [8] выбрали его равным $2\pi/L$, в то время как в работе [11] он равен $3.5 \cdot 2\pi/L$. Чтобы быть более последовательными в рассуждениях обратим внимание на дисперсию реальных материалов. Закон дисперсии для каждого вещества уникален и, как правило, выглядит достаточно сложно, рисунок 1а.

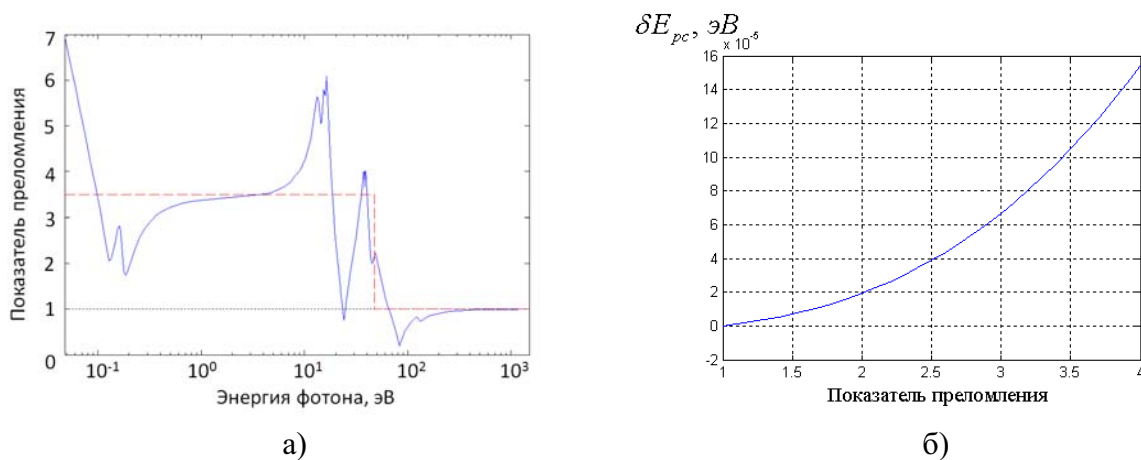


РИС. 1. а) Зависимость показателя преломления арсенида галлия от энергии фотона. Пунктиром показана ступенчатая функция (19); б) Зависимость рассчитанной поправки к энергии уровня $1S$ атома водорода от показателя преломления материала, из которого изготовлен фотонный кристалл (второй средой является воздух).

Для того чтобы оценить исследуемый эффект, мы также ограничимся грубым приближением, при котором дисперсия среды моделируется ступенчатой функцией,

$$n(\omega) = \begin{cases} n_0, & \omega < \Lambda \\ 1, & \omega \geq \Lambda \end{cases} \quad (19)$$

где n_0 — это характерный показатель преломления материала в оптической области, Λ — это параметр обрезания, определяющий ту энергетическую границу, за которой взаимодействием фотонов со средой можно пренебречь. Очевидно, что собственно-энергетические поправки к энергиям уровней будут тем больше, чем больше будет оптический контраст фотонного кристалла, то есть отношение большего показателя преломления к меньшему. Самым оптимальным в данном случае будет оставлять полости фотонного кристалла пустыми, а материал выбирать с наибольшей оптической плотностью. Поэтому расчеты были проведены нами для фотонного кристалла на основе арсенида галлия (GaAs). Этот материал известен тем, что имеет относительно большой показатель преломления в оптическом диапазоне ($n_0 = 3.5$). Параметр Λ для GaAs исходя из графиков на рисунке 1а равен 47.8 эВ.

Для фотонного кристалла с параметрами ячейки $L = 2a + b = 100$ нм и $a = 46$ нм была получена новая поправка к энергетическим уровням атомов, которая не имеет место

в атомах в свободном пространстве. Для атома водорода в состоянии $1S$, помещенного в фотонный кристалл, она составила $1.05 \cdot 10^{-4}$ эВ.

Обнаруженный эффект может иметь большое практическое применение в свете прогресса в области управления свойствами материалов, достигнутого в последнее время, с помощью разнообразных воздействий. Особый интерес представляет управление с помощью оптического излучения, основанное, например, на оптическом эффекте Керра. В связи с этим активно обсуждаются нелинейные свойства фотонных кристаллов и возможность контроля таких их параметров, как, например, ширина и положение запрещенной зоны [12-14]. Во всех исследованиях, посвященных данной тематике, внимание акцентировалось на том факте, что под воздействием внешних полей существенно будут изменяться свойства лишь фотонного кристалла, но не атомов, помещенных в него. Однако, как показано выше, в условиях фотонных кристаллов в спектрах атомов может быть обнаружен эффект, обусловленный изменением свойств электромагнитного вакуума. Оказалось, что этот эффект чувствителен к изменению параметров фотонного кристалла. В частности, обнаруженный эффект очень существенно зависит от показателя преломления материала, из которого изготовлен фотонный кристалл, рисунок 1б. Таким образом, спектральные линии атомов, помещенных в фотонный кристалл, оказываются чувствительными к показателю преломления.

5. Заключение

Мы рассмотрели проблему взаимодействия атомов, помещенных в фотонные кристаллы, с собственным полем излучения. Нами показано, что среда фотонных кристаллов существенно влияет на характер взаимодействия атомных электронов с собственным полем излучения и это приводит к тому, что при таких условиях происходит дополнительный сдвиг энергетических уровней нового типа, который не сводится к обычному лэмбовскому сдвигу. Предсказанный сдвиг рассчитан для атома водорода, помещенного в пустоты фотонного кристалла на основе арсенида галлия. Важным является то, что при определенных условиях, рассматриваемая поправка к энергии уровней атома в фотонном кристалле может быть гораздо больше лэмбовского сдвига. При этом изменение спектра атома будет зависеть исключительно от структуры фотонного кристалла, что открывает дорогу к массе практических приложений, основанных на управлении спектром атомов, помещенных в фотонные кристаллы, путем изменения его показателя преломления, например, с помощью эффекта Керра. Кроме того, подобное явление может быть обнаружено и в других наноматериалах, которые способны влиять на изменение функции плотности фотонных состояний.

Литература

- [1] John S., Wang J. Quantum optics of localized light in a photonic band gap // *Phys. Rev. B.* — 1991. — 43. — P. 12772-12789.
- [2] John S., Wang J. Quantum electrodynamics near a photonic band gap: photon bound states and dresses atoms // *Phys. Rev. Lett.* — 1990. — 64. — P. 2418-2421.
- [3] John, S., Quang T. Spontaneous emission near the edge of a photonic band gap // *Phys. Rev. A.* — 1994. — 50. — P. 1764-1769.
- [4] Quang T., Woldeyohannes M., John S., Agarwal G.S. Coherent control of spontaneous emission near a photonic band edge: a single-atom optical memory device // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — 79. — P. 5238-5241.
- [5] Vats N., John S., Busch K. Theory of fluorescence in photonic crystals // *Phys. Rev. A.* — 2002. — 65. — 043808.
- [6] Lambropoulos P., Nikolopoulos G.M., Nielsen T.R., Bay S. Fundamental quantum optics in structured reservoirs // *Rep. Prog. Phys.* — 2000. — 63. — P. 455-603.
- [7] Busch K., John S. Photonic band gap formation in certain self-organizing systems // *Phys. Rev. E.* — 1998. — 58. — 3896-3908.

- [8] Fussell D.P., McPhedran R.C., Martijn de Sterke C. Two-dimensional treatment of the level shift and decay rate in photonic crystals // *Phys. Rev. E.* — 2005. — 72. — 046605 (1-14).
- [9] Sakoda K. *Optical Properties of Photonic Crystals*. — Springer, Berlin, 2001.
- [10] Bethe H.A. The electromagnetic of energy levels // *Phys. Rev.* — 1947. — 72. — P. 339-341.
- [11] Wang X.-H., Kivshar Y.S., Gu B.-Y. Giant Lamb shift in photonic crystals // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — 93. — 073901 (1-4).
- [12] Tan H. W., Driel H.M., Schweizer S.L., Wehrspohn R.B., Gosele U. Nonlinear optical tuning of a two-dimensional silicon photonic // *Phys. Rev. B.* — 2004. — 70. — 205110 (1-5).
- [13] Kuang S.-Q., Wan R.-G., Kou J., Jiang Y., Gao J.-Y. Tunable double photonic bandgaps in a homogeneous atomic medium // *J. Opt. Soc. Am. B.* — 2010. — 27. — P. 1518-1522.
- [14] Манцызов Б. И. *Когерентная и нелинейная оптика фотонных кристаллов.* — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 208 с.