

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ УЛЬТРАКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ В СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКЕ, ОПИСЫВАЕМОМ МОДЕЛЬЮ ДЮФФИНГА ПЯТОГО ПОРЯДКА

С. С. Оженко<sup>1</sup>, Е. В. Казанцева<sup>2</sup>, А. И. Маймистов<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»;

<sup>2</sup>Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и  
автоматики;

<sup>3</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет)

elena.kazantseva@gmail.com, aimaimistov@gmail.com

PACS 42.65.Sf, 52.35.Mw, 77.80.-e

Рассмотрено распространение и взаимодействие предельно коротких импульсов в сегнетоэлектрической среде, характеризуемой нелинейностями третьего и пятого порядков. Опираясь на найденные ранее аналитические решения, численно продемонстрирована устойчивость стационарных импульсов по отношению к аддитивной модуляции и столкновениям. По отношению к мультипликативной модуляции импульсы оказываются устойчивы при высокой частоте модуляции и неустойчивы по отношению к низкочастотной модуляции. Показана устойчивость электромагнитного домена при воздействии на него стационарного импульса.

**Ключевые слова:** предельно короткие электромагнитные импульсы, сегнетоэлектрики, параэлектрики, домены, устойчивость.

### 1. Введение

Достижения в области квантовой электроники сделали возможной генерацию предельно коротких импульсов электромагнитного излучения. Длительность таких импульсов оказывается порядка фемтосекунд [1]. В связи с этим возник естественный интерес к вопросу о взаимодействии таких импульсов с веществом. Актуальным, в частности, является анализ распространения предельно коротких импульсов в нелинейных диспергирующих средах в рамках различных моделей среды. Естественной основой всех моделей являются уравнения Максвелла, дополненные материальными уравнениями, определяющими поляризацию или токи, или же уравнением Шредингера для электронов, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем.

Здесь будет рассмотрено распространение предельно коротких электромагнитных импульсов в сегнетоэлектрике, находящемся в параэлектрической фазе. Описание сегнетоэлектрика выполнено на основе модели Гинзбурга-Ландау-Девоншира в случае одноосного сегнетоэлектрика [2]. Отклик на ультракороткий импульс электромагнитного поля с учетом дисперсии и нелинейных свойств такого сегнетоэлектрика может быть описан в рамках модели Дюффинга пятого порядка. Используя приближение однонаправленных волн в [3] была получена система уравнений, описывающая распространение электромагнитных волн в такой среде.

В приближении однонаправленных волн уравнения Максвелла сводятся к волновому уравнению

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{2\pi}{c} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (1)$$

Поляризация единицы объема вещества  $P$  изменяется согласно уравнению

$$\tau_0^2 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + AP + BP^3 + CP^5 = E, \quad (2)$$

где  $\tau_0$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$  — феноменологические параметры модели, причем параметр  $A$  зависит от температуры как  $A = a_0(T - T_C)$  и может быть положительным или отрицательным, в зависимости от температуры  $T$ . Следует отметить, что в приведенном выше уравнении отсутствует член, отвечающий за угасание колебаний, его можно не учитывать, считая длительность взаимодействия предельно короткого импульса со средой много меньше времени релаксации ее поляризации. Здесь будет рассмотрен случай, когда температура превышает температуру Кюри  $T_C$ , то есть сегнетоэлектрик в параэлектрической фазе.

Перейдем к безразмерным переменным для времени и координаты  $\tau = \sqrt{A}(t - z/c)/\tau_0$ ,  $\zeta = z/L$ , а также введем безразмерные переменные  $q = P/P_0$  — для поляризации и  $e = E/E_0$  — для электрического поля волны. Нормировочная длина определена выражением  $L = c\tau_0\sqrt{A}/2\pi$ . Коэффициент кубичной нелинейности определен следующим образом  $2\mu = (B/A^3)E_0^2$ , коэффициент нелинейности пятого порядка есть  $\varepsilon = CE_0^4/3A^5$ . Нормировочные константы для поляризации и электрического поля связаны следующим образом:  $P_0 = E_0/A$ .

В безразмерных переменных уравнения (1) и (2) принимают вид

$$\frac{\partial e}{\partial \zeta} = -\frac{\partial q}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 e}{\partial \tau^2} + q + 2\mu q^3 + 3\varepsilon q^5 = e. \quad (3)$$

Выбирая должным образом нормировочную амплитуду поля  $A_0$  можно получить значение  $\mu$  равное  $\pm 1 = \text{sgn } B$ . Тогда  $\varepsilon = CA/3B^2$ .

Анализ решений для модели Дюффинга второй и третьей степени был представлен в работах [4], [5]. Исследование распространения короткого импульса в среде с квадратичной нелинейностью в приближении однонаправленных волн показало, что здесь существует семейство стационарных уединенных волн, соответствующих предельно коротким импульсам. Численное моделирование распространения показало, что столкновение двух стационарных импульсов не приводит к их разрушению. Было найдено, что более мощные импульсы (отличные от стационарных) распадаются на ряд отдельных, движущихся со своей скоростью импульсов, которые сохраняют свои уникальные свойства в пределах того расстояния, на котором было проведено моделирование. Столкновение двух импульсов сопровождалось сдвигом фаз каждого из них, а скорость хотя бы и незначительно, менялась после взаимодействия. Из чего был сделан вывод, что найденные стационарные импульсы не являются солитонами в строгом смысле, хотя и проявляют довольно высокую стабильность. Аналогичные результаты были получены для среды с кубической нелинейностью.

В нашем случае были так же получены формы решений в виде стационарных импульсов [3]. Если  $\mu = +1$ , может существовать два типа решения. Для  $\varepsilon > 0$  имеем

$$e^2(\xi; \mu = +1) = \frac{2a(a+1)^2}{1 + \sqrt{1 + 4a\varepsilon} \cosh[2a^{1/2}\xi]}, \quad (4)$$

и для  $\varepsilon < 0$  соответственно

$$e^2(\xi; \mu = +1) = \frac{2a(a+1)^2}{1 + \sqrt{1 - 4a|\varepsilon|} \cosh[2a^{1/2}\xi]}. \quad (5)$$

Положив  $\mu = -1$ , получим лишь одно решение для  $\varepsilon > 0$ :

$$e^2(\xi; \mu = -1) = \frac{2a(a+1)^2}{\sqrt{1+4a\varepsilon} \cosh[2a^{1/2}\xi] - 1}. \quad (6)$$

В формулах (4)–(6) новая (характеристическая) переменная  $\xi = \tau - \zeta/\alpha$  определяет скорость распространения стационарного импульса в среде и введен параметр  $a = \alpha - 1$ , связывающий скорость распространения стационарного импульса с его амплитудой. Для краткости стационарные импульсы (4)–(6) будут называться солитонами, несмотря на то, что система (3) не является вполне интегрируемой и ее решения (4)–(6) могут быть неустойчивыми.

Особый интерес представляет распространение стационарных импульсов вида (5) в случае когда  $a \rightarrow a_c = 1/4|\varepsilon|$ . В [3] было показано, что в пределе, когда параметр  $a$  приближается к критическому значению  $a_c$ , солитон распадается – его амплитуда достигает определенного конечного значения, а ширина может возрастать бесконечно. Импульс принимает почти прямоугольную форму с резкими фронтами. Такие солитоны были в [3] названы электромагнитными доменами.

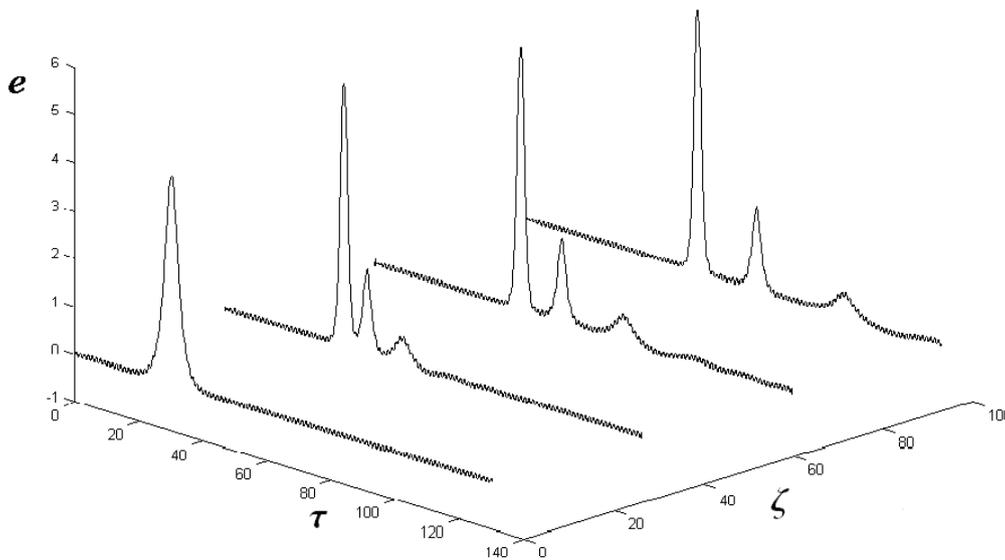


РИС. 1. Распад импульса превышающего энергию стационарного, на отдельные импульсы

## 2. Численное моделирование

### 2.1. Замечания о методе численного моделирования

Для удобства численного интегрирования представим систему (3) в виде

$$\frac{\partial e}{\partial \zeta} = -p, \quad \frac{\partial q}{\partial \tau} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial \tau} = e - q - 2\mu q^3 - 3\varepsilon q^5. \quad (7)$$

Для решения системы (7) можно использовать любые методы численного интегрирования. Но, как оказалось, широко распространенные разностные методы, такие как: метод предиктор-корректор, метод Рунге-Кутты, а так же схема Адамса являются неустойчивыми для некоторых частных случаев. Наилучшие результаты показала комбинация неявной схемы Адамса-Моултона четвертого порядка для интегрирования третьего уравнения системы,

неявной схемы Нумерова для интегрирования второго уравнения системы и специальной разностной схемы шестого порядка [6] для интегрирования по оси  $\zeta$ . Выбор неявного метода диктуется тем, что они считаются безусловно устойчивыми, что позволяет существенно увеличить шаг разностной сетки. Имело бы смысл применять неявную схему для интегрирования по оси  $\zeta$ , но это приведет к существенному увеличению расхода машинного времени.

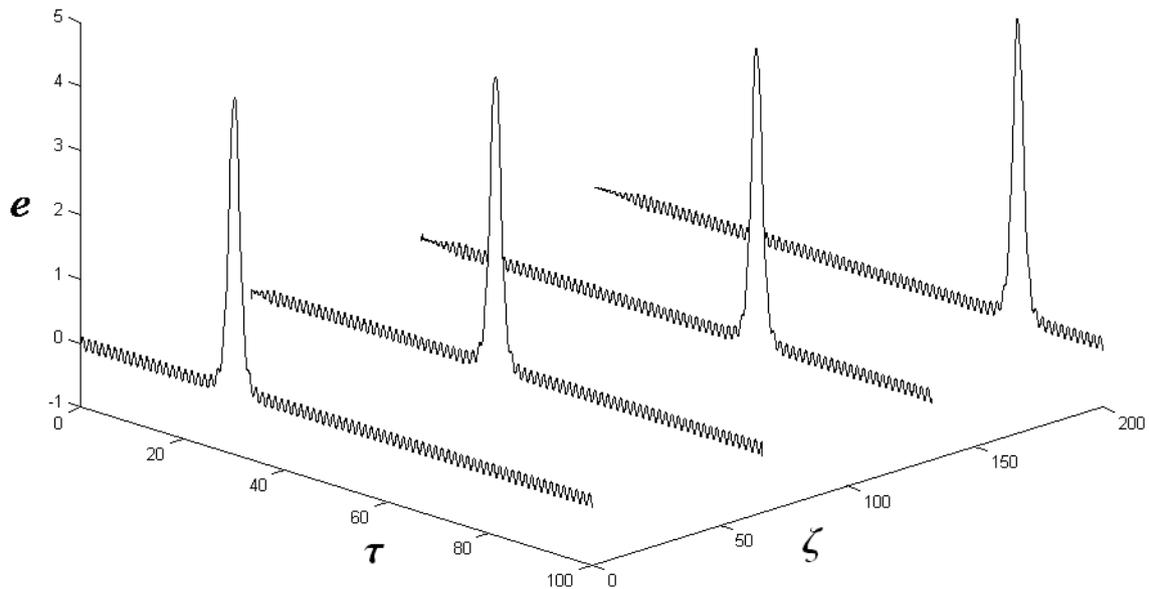


Рис. 2. Эволюция стационарного импульса при аддитивной модуляции амплитуды импульса гармонической волной

С учетом начальных и краевых условий

$$e(\zeta = 0, \tau) = e_0(\tau), \quad \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} q(\zeta, \tau) = \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} p(\zeta, \tau) = 0, \quad (8)$$

можно найти два интеграла движения

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e(\zeta, \tau) d\tau, \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^2(\zeta, \tau) d\tau.$$

В данном случае их значения определялись численно по формуле трапеций. Сохранение интегралов движения служило показателем достоверности полученных результатов.

При выборе параметров среды  $\mu = +1$  и  $\varepsilon = -0.124$ , и, в качестве начального условия для  $e$ , стационарное решение (5) с  $a = 1$ , было продемонстрировано, что такой импульс распространяется без искажений до значения координаты  $\zeta = 1000$ . Это может служить тестом программы численного решения. Отклонения интегралов движения при этом находятся в пределах погрешности применяемых численных методов. Если на вход среды поступает импульс с энергией, превышающей энергию стационарного импульса, то по мере его распространения в среде происходит распад на ряд импульсов, каждый из которых, подобно стационарным импульсам движется со своей скоростью. На рис. 1 показан распад такого импульса при аддитивной модуляции гармоникой вида  $0.1 \sin(5\tau)$ .

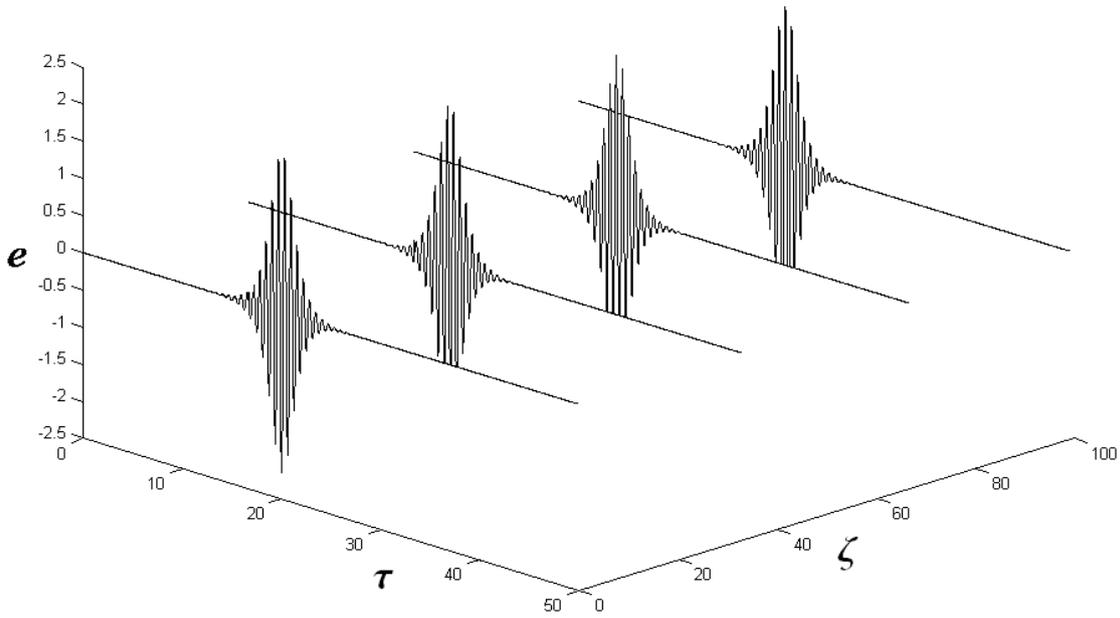


Рис. 3. Стабильность формы огибающей импульса с мультипликативной модуляцией

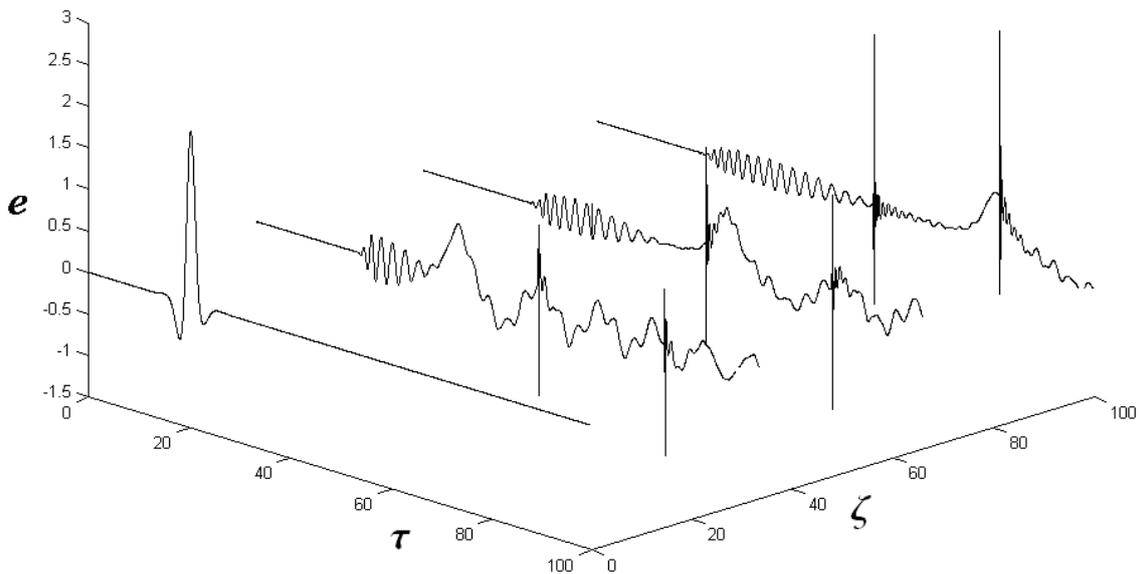


Рис. 4. Распад слабого импульса, модулированного гармонической волной

## 2.2. Исследование устойчивости по отношению к малым возмущениям

Интерес представляет устойчивость нелинейных волн по отношению к непрерывным возмущениям, например к регулярной модуляции огибающей. Солитоны с такой первоначальной модуляцией могут по мере распространения превратиться в импульсы с гладкой огибающей. Было рассмотрено два типа модуляции амплитуды гармонической волной — аддитивная и мультипликативная. В первом случае было найдено, что стационарный импульс распространяется на фоне непрерывной гармонической волны, сохраняя свою форму. На рис.2 представлен пример эволюции импульса с  $a = 1.8$  и модуляцией вида  $0.1 \sin(5\tau)$ .

Было также найдено, что аддитивная высокочастотная модуляция не препятствует распаду исходного мощного импульса на ряд стационарных импульсов.

Случай мультипликативной модуляции рассматривался для импульса с параметром  $a = 0.5$  и модуляцией вида  $\sin(10\tau)$ . Было найдено, что такой начальный импульс ведет себя подобно стационарному, но не освобождается от модуляции (рис. 3).

Однако, если понижать частоту модуляции, импульс испытывает дисперсионное расщепление. Из него выделяется медленно распространяющаяся квазигармоническая уединенная волна, а быстро распространяющаяся часть коллапсирует. На рис. 4 приведен пример разрушения стационарного импульса под действием мультипликативной низкочастотной модуляции. Расчет проведен для импульса с  $a = 0.5$  и модулированного сигналом вида  $\sin(\tau)$ . Частота модуляции тут порядка обратной длительности импульса, и в этом смысле модуляция считается низкочастотной.

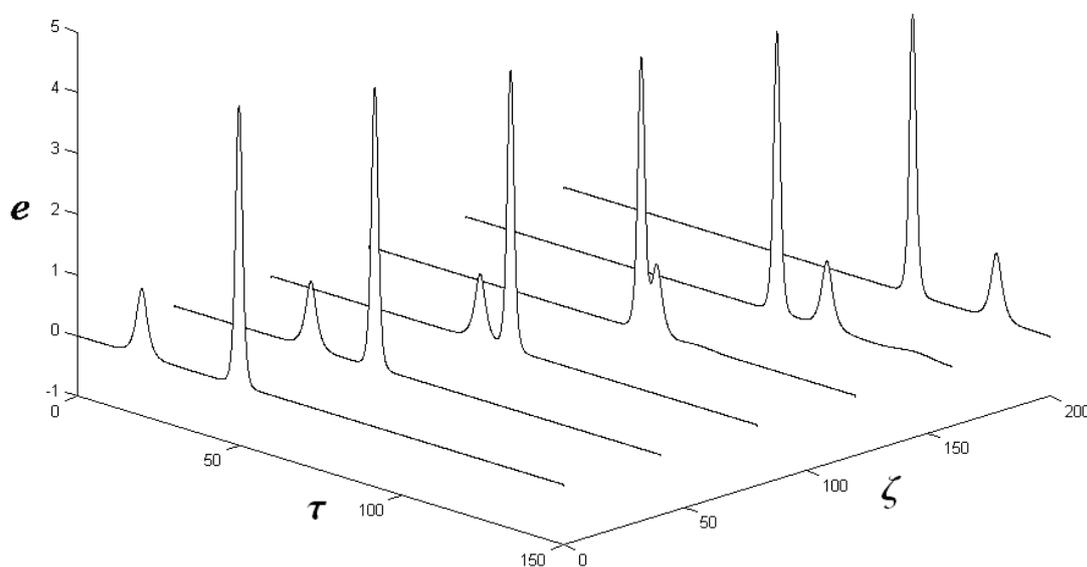


Рис. 5. Устойчивость уединенных волн по отношению к столкновениям

### 2.3. Исследование процесса столкновения стационарных импульсов

Столкновение двух стационарных импульсов, имеющих различные скорости, показало их значительную устойчивость к столкновениям. На рис. 5 показано столкновение двух уединенных волн характеризующихся параметрами  $a = 1.8$  и  $a = 0.5$ . Однако при таком взаимодействии помимо начальных стационарных импульсов может образовываться еще один малый по амплитуде импульс, что свидетельствует о том, что стационарные импульсы не устойчивы по отношению к столкновениям.

### 2.4. Взаимодействие электромагнитного домена с солитоном

Особый интерес представляет поведение доменов при их столкновении с солитонами или с линейными квазигармоническими волнами. Здесь найдено, что для среды с  $\varepsilon > -0.74$  импульсы с  $a \rightarrow a_c \equiv 1/4|\varepsilon|$  ведут себя неустойчиво. Из рис. 6 видно как ведет себя такой неустойчивый импульс. Начиная с  $\varepsilon = -0.74$  импульсы распространялись как устойчивые уединенные стационарные волны до значений  $\zeta = 1500$ .

Электромагнитные домены оказались устойчивы по отношению к аддитивной модуляции и столкновению с уединенными импульсами. На рис. 7 показано столкновение

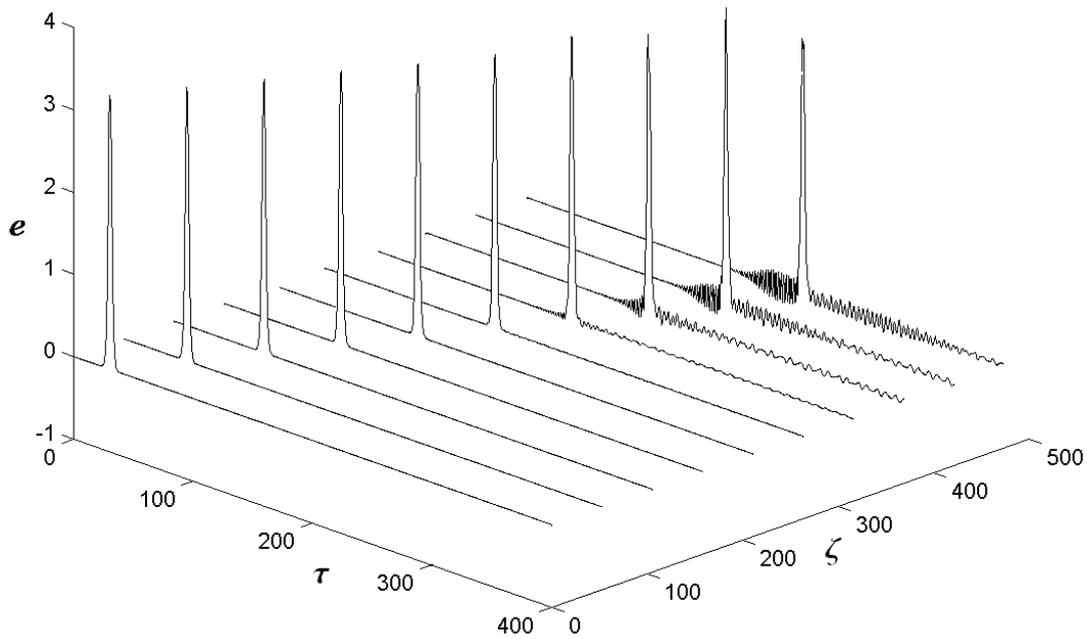


РИС. 6. Неустойчивое поведение уединенных импульсов с амплитудой, близкой к критической

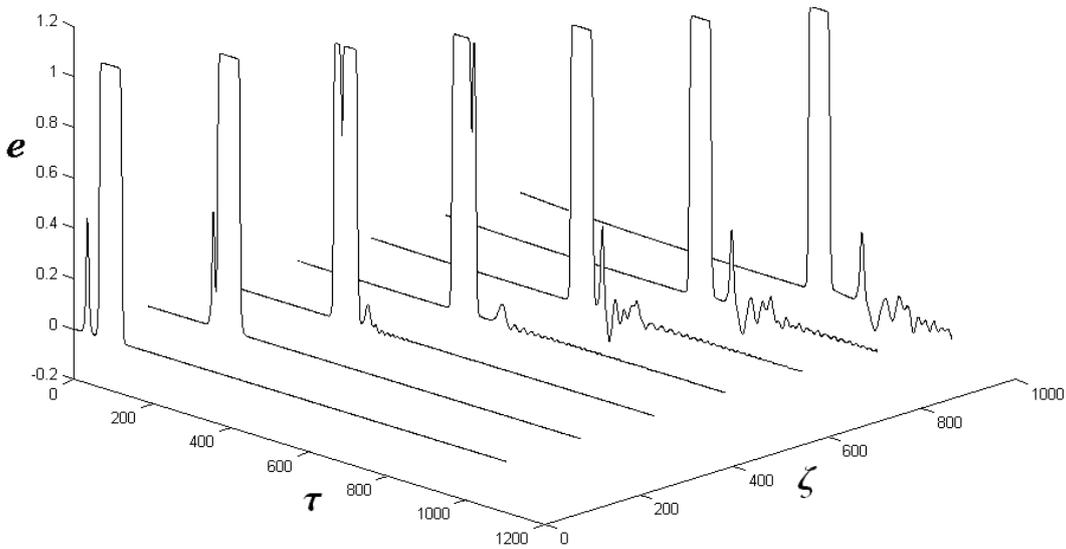


РИС. 7. Устойчивость доменов по отношению к столкновению с солитонами

солитона, характеризуемого параметром  $a = 0.14$  с доменом. Хорошо видно, что солитон, сталкиваясь с доменом, меняет форму. Кроме того, процесс сопровождается излучением.

### 3. Заключение

В рамках поставленной задачи была спроектирована, написана и отлажена программа для численного решения уравнения (3). Численные расчеты показали, что устойчивость уединенных импульсов зависит от их амплитуды и параметра нелинейности среды. В работе так же была продемонстрирована устойчивость солитонов по отношению к аддитивной

и мультипликативной модуляции. Моделирование показало, что солитоны не вполне устойчивы по отношению к столкновению друг с другом. Их неустойчивость особенно ярко проявляется к столкновению с доменами. Численные расчеты показали, что домены устойчивы по отношению к аддитивной модуляции и столкновению с солитонами.

### Литература

- [1] Morgner U., Ell R., Metzler G., Schibli T. R., Kertner F. X., Fujimoto J. G., Haus H. A., Ippen E. P. Nonlinear Optics with Phase-Controlled Pulses in the Sub-Two-Cycle Regime // *Phys.Rev.Lett.* — 2011. — 86 (24). — P. 5462-5465.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 623 с.
- [3] Маймистов А.И. Распространение предельно короткого электромагнитного импульса в нелинейной среде, описываемой моделью Дюффинга пятого порядка // *Оптика и спектроскопия.* — 2003. — 94 (2). — С. 281-287.
- [4] Казанцева Е.В., Маймистов А.И. Распространение предельно коротких импульсов в нерезонансной квадратично-нелинейной среде в приближении однонаправленных волн // *Квантовая электроника.* — 2000. — 30 (7). — С. 623-628.
- [5] Kazantseva E.V., Maimistov A.I., Caputo J.G. Reduced Maxwell-Duffing description of extremely short pulses in nonresonant media // *Phys.Rev. E.* — 2005. — 71(5). — P. 056622 (12 pages).
- [6] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Бином, 2007. — 636 с.
- [7] Самарский А.А. Введение в численные методы. — М.: Наука, 1987. — 286 с.