НАНОСИСТЕМЫ: ФИЗИКА, ХИМИЯ, МАТЕМАТИКА, 2012, 3 (6), С. 16–24

УДК 517.984.53

О БЕСКОНЕЧНОСТИ ЧИСЛА ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МОДЕЛИ ФРИДРИСХА

Ю. Х. Эшкабилов

Национальный Университет Узбекистана им. М.Улугбека, Узбекистан

yusup62@mail.ru

Изучен дискретный спектр самосопряженных операторов в модели Фридрихса с положительным симметричным ядром. Получены достаточные условия существования бесконечного числа отрицателных собственных значений в модели Фридрихса.

Ключевые слова: модель Фридрихса, спектр, существенный спектр, дискретный спектр.

1. Введение

Пусть $u(t)$ — вещественная непрерывная функция на $[0,1]$, U — оператор умножения на функцию $u(t)$ в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$, т.е.

$$Uf(t) = u(t)f(t), f \in L_2[0,1]$$

и K – самосопряженный компактный интегральный оператор в $L_2[0,1]$. Некоторые актуальные задачи, в частности, задачи квантовой механики, статистической механики и гидродинамики [6,7,11] сводятся к исследованию дискретного спектра оператора H в пространстве $L_2[0,1]$, действующего по формуле

$$H = U - K. \tag{1}$$

Известно, что из классической теоремы Вейля о компактном возмущении вытекает, что существенный спектр $\sigma_e(H)$ оператора H совпадает со спектром мультипликатора U, т.е. $\sigma_e(H) = \sigma(U)$. В 1938 году оператор вида (1) был рассмотрен К. О. Фридрихсом [17], поэтому оператор вида (1) называется оператором в модели Фридрихса.

В работах [3,14] было показано, что в случае $u(t) = t$, если ядро интегрального оператора K — гёльдеровское с покозателем $\mu > \frac{1}{2}$, то оператор $U - K$ имеет вне существенного спектра конечное число собственных значений. Далее, оператор в модели Фридрихса изучался в работах [2,4,5,16]. Пусть $u(t)$ — вещественная аналитическая функция в некоторой комплексной окрестности отрезка $[a,b]$, и пусть ядро оператора K — симметричная аналитическая функция в некоторой окрестности квадрата $[a,b]^2$. Доказано (см. [2,4,5,16]), что, если число критических точек функции $u(t)$, т.е. тех точек $t \in [a,b]$, в которых $u'(t) = 0$, конечно, и каждая из них невырожденная, то дискретный спектр оператора H конечен.

Вопрос о бесконечности числа собственных значений в модели (1), лежащих вне существенного спектра, изучен в работе [13]. В работе [9] изучен сингулярный спектр самосопряженных операторов в модели Фридрихса. Сингулярный и точечный спектры в самосопряженной неограниченной модели Фридрихса подробно изучены в работах [1,8,14,15].

Как нам известно, если мультипликатор U в модели (1), задан неотрицательной функцией $u(t)$, $0 \in Ran(u)$ (т.е. $u_{\min} = 0$) и интегральный оператор Фредгольма K положительный, то вне существенного спектра $\sigma_e(H)$ оператора H отсутствует положительное собственное значение. При этом, только в модели (1) может появиться отрицательное собственное значение, т.е. дискретный спектр $\sigma_d(H)$ оператора H лежит на отрицательной полуоси вещественных чисел. Более того, если множество $\sigma_d(H)$ бесконечно, то только ноль является предельной точкой для множества $\sigma_d(H)$.

Настоящая заметка посвящена изучению отрицательных собственных значений в модели Фридрихса (1) для симметричных положительных ядер $k(t,s)$ интегрального оператора K. Рассмотриваются два вопроса: первый — какие последовательности отрицательных чисел из l_1 будут лежать в дискретном спектре $\sigma_d(H)$ оператора H, второй — для каких положительных функций $u(t)$ и симметричных положительных ядер $k(t,s)$ интегрального оператора K в модели (1) появится счетное число отрицательных собственных значений.

В третьем пункте доказано, что существует положительная непрерывная функция $u(t)$ и существует симметричное неотрицательное непрерывное ядро $k(t,s)$ для интегрального оператора K такое, что каждое отрицательное число

$$\alpha_n = \frac{1}{b^n} - \frac{1}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

является собственным значением оператора $U - K$, где $b > a > 2$. В четвертом и пятом пункте получено достаточное условие для бесконечности отрицательных собственных значений в модели Фридрихса. Показано, что в модели Фридрихса с ядром Грина $G(t,s)$ и с экспоненциональным ядром $\exp(|t-s|)$ существует бесконечное число отрицательных собственных значений.

2. Собственные значение мультипликатора

Пусть $u(t)$ – заданная вещественнозначная непрерывная функция на [0,1]. Определим мультипликатор $U : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ по правилу

$$Uf(t) = u(t)f(t). \tag{2}$$

Оператор U является самосопряженным ограниченным линейным оператором в $L_2[0,1]$. Имеем

$$\sigma(U) = \sigma_e(U) = [u_{\min}, u_{\max}].$$

где $u_{\min} = \min\limits_{t\in[0,1]} u(t), u_{\max} = \max\limits_{t\in[0,1]} u(t)$.

Предложение 2.1 [12] Мультипликатор U (2) имеет собственное значение тогда и только тогда, когда существует интервал $(\alpha,\beta) \subset [0,1]$ такой, что $u(t) = const, \ \forall t \in (\alpha,\beta)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Определим множества $V_\varepsilon = V_\varepsilon[0,1]$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ следующим образом:

$$V_\varepsilon = V_\varepsilon(0) \cup V'_\varepsilon \cup V_\varepsilon(1),$$

где $V_\varepsilon(0)$ и $V_\varepsilon(1)$ — ε - окрестность в комплексной плоскости точек 0 и 1, соответственно и

$$V'_\varepsilon = \left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant Rez \leqslant 1, \ -\varepsilon < Imz < \varepsilon\right\}.$$

Из предложения 2.1 вытекает

Предложение 2.2 а) Если непрерывная функция $u(t)$ строго возрастает (убывает) на [0,1], то у мультипликатора U отсутствует собственное значение;
б) Если функция $h(z)$ аналитическая в области $V_\varepsilon[0,1]$, при $z \in [0,1]$ принимает вещественные значения и $h(z) = u(z) \neq const$, $z \in [0,1]$, то у мультипликатора U отсутствует собственное значение.

Предложение 2.3. Для любой последовательности положительных чисел $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in l_1$ существует неотрицательная непрерывная функция $u(t)$ на [0,1] такая, что $Ran(u) = [0, \max\limits_{k\in\mathbb{N}} r_k]$ и каждое число r_k является собственным значением мультипликатора U (2).

Доказательство. Рассмотрим убывающую последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ неотрицательных чисел:

$$a_0 = 1, \ \ a_k > a_{k+1} \ \text{ и } \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Положим

$$\triangle_n = \frac{1}{3}\left(a_{n-1} - a_n\right), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Определим последовательность $p_k(t)$ непрерывных («трапециальных») функций на [0,1]:

$$p_k(t) = \begin{cases} \frac{t-a_k}{\triangle_k}, \ \ t \in \left[a_k, a_{k-1} - 2\triangle_k\right], \\ 1, \quad t \in \left[a_{k-1} - 2\triangle_k, a_{k-1} - \triangle_k\right], \\ \frac{a_{k-1}-t}{\triangle_k}, \ \ t \in \left[a_{k-1} - \triangle_k, a_{k-1}\right], \\ 0, \quad t \bar{\in} \left[a_k, a_{k-1}\right], \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k < \infty,$$

т.е. $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in l_1$. Определим неотрицательную непрерывную функцию $r(t)$ на [0,1] по формуле

$$r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) p_k(t), \ \ t \in [0,1]. \tag{3}$$

Очевидно, что $0 \in Ran(r)$, так как $p_k(0) = 0, \ \ k \in \mathbb{N}$. Следовательно, имеем $Ran(r) = [0, \max\limits_{k\in\mathbb{N}} r_k]$.

Пусть

$$\chi_k(t) = \chi_{(a_{k-1}-2\triangle_k, \ a_{k-1}-\triangle_k)}(t), \ \ k \in \mathbb{N},$$

где $\chi_G(t)$ — характеристическая функция множества G. Тогда система функций

$$\varphi_n(t) = \frac{\chi_n(t)}{\sqrt{\triangle_n}}, \ \ n \in \mathbb{N}$$

является ортонормированной в пространстве $L_2[0,1]$.

Определим мультипликатор U в $L_2[0,1]$ следующим образом

$$Uf(t) = r(t)f(t).$$

Оператор U имеет счетное число собственных значений, более того, каждое число r_k является собственным значением мультипликатора U, так как

$$U\varphi_k(t) = r(t)\varphi_k(t) = r_k\varphi_k(t), \ \ k \in \mathbb{N}.$$

3. Метод «треугольных» функций

Пусть функция $u(t)$ на [0,1] определена равенством (3), т.е. $u(t) = r(t),\ \ t \in [0,1]$.

Теорема 3.1. Пусть $\{\lambda_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность положительных чисел удовлетворяющая условию:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\triangle_n} < \infty. \tag{4}$$

Если последовательность $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет соотношению

$$0 < r_k < \lambda_k,\ \ k \in \mathbb{N},$$

то существует неотрицательная непрерывная функция $k(t,s)$ на $[0,1]^2$ такая, что каждое число $\alpha_n = r_n - \lambda_n$ является собственным значением в модели (1), т.е. оператор H (1) имеет счетное число отрицательных собственных значений $\{\alpha_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ и при этом $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Доказательство. Определим последовательность q_n и q'_n :

$$q_n = a_{n-1} - \triangle_n,\ \ q'_n = q_n - \triangle_n\ \ (n \in \mathbb{N}),$$

где последовательность $\{a_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ дана при определении функции $r(t)$ (3). На [0,1] определим последовательность «треугольных» функций $\widetilde{\psi}_n(t)$:

$$\widetilde{\psi}_n(t) = \begin{cases} \frac{2(t-q'_n)}{q_n-q'_n},\ \ t \in \left[q'_n, \frac{q_n+q'_n}{2}\right], \\ -\frac{2(t-q_n)}{q_n-q'_n},\ \ t \in \left[\frac{q_n+q'_n}{2}, q_n\right], \\ 0, \quad t \bar{\in} \left[q'_n, q_n\right], \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что $\widetilde{\psi_n}(t) \in C[0,1],\ \ n \in \mathbb{N}$. Нетрудно проверить, что системы $\left\{\widetilde{\psi_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ образуют ортогональные системы в $L_2[0,1]$ и

$$\int_0^1 \left|\widetilde{\psi_n}(t)\right|^2 dt = \frac{\triangle_n}{3},\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, системы функций $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_2[0,1]$, заданные равенством

$$\psi_n(t) = \sqrt{\frac{3}{\triangle_n}} \cdot \widetilde{\psi_n}(t) \tag{5}$$

являются ортонормированными.

Определим функцию $k(t,s)$ на $[0,1]^2$:

$$k(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \psi_n(t) \psi_n(s),\ \ t,s \in [0,1]. \tag{6}$$

Из (4) и (5) следует, что последний функциональный ряд на $[0,1]^2$ сходится равномерно и, следовательно,

$$k(t,s) \in C[0,1]^2,\ \ k(t,s) \geqslant 0,\ \ t,s \in [0,1].$$

Пусть ядро интегрального оператора K в (1) задано равенством (6). Тогда

$$H\psi_n = U\psi_n - K\psi_n = r(t)\psi_n(t) - \lambda_n \psi_n(t) = (r_n - \lambda_n)\psi_n(t),\ \ n \in \mathbb{N},$$

т.е. каждое отрицательное число $\alpha_n = r_n - \lambda_n$ является собственным значением оператора (1). Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$■

Пример 3.1. Пусть $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ и $r_n = \frac{1}{b^n}$, где $b > 2$ и функция $r(t)$ задана равенством (3). Тогда

$$\triangle_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^n}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$\lambda_n = \frac{1}{a^n}, \;\; n \in \mathbb{N},$$

где $2 < a < b$.

Тогда

$r_n < \lambda_n, \;\; n \in \mathbb{N}$ и $\frac{\lambda_n}{\triangle_n} = 3 \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^n, \;\; n \in \mathbb{N}$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\triangle_n} < \infty.$$

Пусть интегральный оператор K задан с ядром (6). Тогда в силу теоремы 3.1 каждое число

$$\alpha_n = \frac{1}{b^n} - \frac{1}{a^n}$$

является собственным значением оператора H (1).

4. Метод характеристических функций

Пусть $u(t)$ — непрерывная неотрицательная функция, $u(t_0) = 0, \;\; t_0 \in [0,1], k(t,s) \geqslant 0$ и $k(t_0,t_0) \neq 0$. Пусть системы $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ открытых подмножеств $G_k \subset [0,1]$ удовлетворяют следующим условиям:

(i) $G_i \cap G_j = 0$ при $i \neq j$;

(ii) существует последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ и $G_n \subset O_{\varepsilon_n}(t_0) \cap [0,1]$, где $O_\delta(t) = (t-\delta, t+\delta)$;

Теорема 4.1. Пусть $u(x_0) = 0$ и $k(x_0,x_0) \neq 0$ для некоторого $x_0 \in [0,1]$. Если существуют системы открытых подмножеств $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ множества [0,1] удовлетворяющие условиям (i) и (ii) такие, что

$$\sup_{t\in G_n} u(t) < \mu(G_n) \inf_{t,u\in G_n} k(t,u), \forall n \in \mathbb{N},$$

где $\mu(\cdot)$ — мера на σ — алгебре измеримых подмножеств из $[0,1]$, то в модели (1) существует счетное число отрицтельных собственных значений.

Доказательство. Определим последовательность ортонормированных функций $\{f_n\}$ в $L_2[0,1]$ по правилу:

$$f_n(t) = \frac{\chi_{G_n}(t)}{\sqrt{\mu(G_n)}}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Тогда имеем

$$(Hf_n, f_n) = (Uf_n, f_n) - (Kf_n, f_n) = \int_0^1 u(t) f_n^2(t) dt -$$

$$-\int_0^1 \int_0^1 k(t,u) f_n(t) f_n(u) du dt = \int_{G_n} u(t) f_n^2(t) - \int_{G_n} \int_{G_n} k(t,u) f_n(t) f_n(u) dt du \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in G_n} u(t)\int_{G_n} f_n^2(s)ds - \inf_{t,u\in G_n} k(t,u)\left(\int_{G_n} f_n(\xi)d\xi\right)^2 =$$

$$= \sup_{t\in G_n} u(t) - \frac{1}{\mu(G_n)} \inf_{t,u\in G_n} k(t,u)\left(\int_{G_n} \chi_{G_n}(\xi)d\xi\right)^2 =$$

$$= \sup_{t\in G_n} u(t) - \frac{1}{\mu(G_n)} \inf_{t,u\in G_n} k(t,u)\cdot\mu^2(G_n) = \sup_{t\in G_n} u(t) - \mu(G_n)\inf_{t,u\in G_n} k(t,u) < 0,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Отсюда и, в силу теоремы 3.3 из [13] (о достаточном условии бесконечности дискретного спектра в модели Фридрихса) получим,что оператор H (1) имеет счетное число собственных значений. ■

Пример 4.1. Пусть ядро $k(t,s)$ интегрального оператора K является экспоненциальной функцией, т.е.

$$k(t,s) = e^{|t-s|},\ \ t,s\in[0,1]$$

и

$$u(t) = t^{\alpha},\ \ \alpha > 2.$$

Определим последовательность подмножеств $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ следующим образом

$$G_n = \left\{x\in[0,1] : \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}\right\},\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Очевидно, что $G_n\cap G_m = \emptyset$ при $n\neq m$ и $G_n\subset O_{\frac{1}{n}}(0)\bigcap[0,1],\ \ n\in\mathbb{N}.$

Имеем

$$\inf_{t,s\in G_n} k(t,s) = \inf_{t,s\in G_n} e^{|t-s|} \geqslant 1.$$

Тогда

$$\mu(G_n)\inf_{t,s\in G_n} k(t,s) > \frac{1}{2n^2}.$$

Легко убедиться, что при всех $n > n_0 = 2^{\frac{1}{\alpha-2}}$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2n^2} > \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Следовательно,

$$\sup_{t\in G_n} u(t) < \mu(G_n)\inf_{t,s\in G_n} k(t,s)\ \text{ при всех }\ n > n_0.$$

Тогда, в силу теоремы 4.1, в модели (1) с ядрами экспоненциальной функции $e^{|t-s|}$ существует счетное число отрицательных собственных значений $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

Пример 4.2. Пусть ядро $k(t,s)$ интегрального оператора K является функцией Грина, например

$$k(t,s) = G(t,s) = \begin{cases} t(1-s),\ \ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \\ s(1-t),\ \ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

и

$$u(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)^4.$$

Очевидно, что $u(\frac{1}{2}) = 0$ и $G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Определим последовательность подмножеств $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ следующим образом

$$G_n = \left\{x \in [0,1] : \frac{1}{n+1} < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{n}\right\}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Легко заметить, что $G_n \cap G_m = \emptyset$ при $n \neq m$ и $G_n \subset O_{\frac{1}{n}}(\frac{1}{2}), \ \ n \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\sup_{t\in G_n} u(t) = \sup_{t\in G_n} \left(t - \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{n^4} \ \text{ при } \ n \geqslant 2.$$

С другой стороны,

$$\inf_{t,s\in G_n} G(t,s) \geqslant \inf_{t,s\in O_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{2})} G(t,s) = \gamma_0 > 0 \ \text{ при } \ n \geqslant 3.$$

Имеем,

$$\mu(G_n) = \frac{2}{n(n+1)}, \ \ n \geqslant 3.$$

Легко убедиться, что существует натуральное число $n_0 \geqslant 3$ такое, что

$$\frac{1}{n^4} < \frac{2\gamma_0}{n(n+1)} \ \text{ при всех } \ n > n_0.$$

Следовательно,

$$\sup_{t\in G_n} u(t) < \mu(G_n) \inf_{t,s\in G_n} G(t,s) \ \text{ при всех } \ n > n_0.$$

Тогда, в силу теоремы 4.1, в модели (1) с ядрами Грина $G(t,s)$ существует счетное число отрицательных собственных значений $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

5. Модель Фридрихса с произвольным положительным мультипликатором

Пусть $u(x)$ — произвольная неотрицательная непрерывная функция на [0,1].

Теорема 5.1. Если $u(0) = 0$ и $u(x) \leqslant x^{\alpha_1}$ при всех $x \in (0, \varepsilon), \ \ 0 < \varepsilon < 1$, где $\alpha_1 > 1$. Тогда существует неотрицательное непрерывное ядро $k(t,s)$ такое, что оператор H (1) имеет счетное число отрицательных собственных значений.

Доказательство. Пусть $a_n = \frac{1}{2^n}, \ \ n \in \mathbb{N}$. Определим последовательность $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lambda_n = u_n + \frac{1}{n^{\alpha_2}} \cdot \frac{1}{2^n},$$

где $\alpha_2 > 1$ и $u_n = \max\limits_{\xi\in[q_n', q_n]} u(\xi), \ \ n \in \mathbb{N}$.

Здесь

$$q_n = a_{n-1} - \frac{1}{3\cdot 2^n}, \ \ q_n' = q_n - \frac{1}{3\cdot 2^n}.$$

Определим функцию $k(t,s)$ следующим образом

$$k(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \psi_n(t)\psi_n(s), \ \ t,s \in [0,1],$$

где $\{\psi_n\}$ – ортонормированная система в $L_2[0,1]$ заданная формулой (6). Очевидно, что существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $u(x) < a_{n-1}^{\alpha_1}$ для всех $x \in [0, a_{n-1}]$ при $n > n_0$.

Отсюда при $n > n_0$ получим, что

$$\lambda_n \cdot 2^n = \left(u_n + \frac{1}{n^{\alpha_2}} \cdot \frac{1}{2^n}\right) \cdot 2^n = 2^n \cdot u_n + \frac{1}{n^{\alpha_2}} = 2^n \cdot \sup_{\xi \in [q_n', q_n]} u(\xi) + \frac{1}{n^{\alpha_2}} \leqslant 2^n \cdot a_{n-1}^{\alpha_1} + \frac{1}{n^{\alpha_2}} =$$

$$= \frac{2^n}{2^{(n-1)\alpha_1}} + \frac{1}{n^{\alpha_2}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{2^{\alpha_1}}\right)^{n-1} + \frac{1}{n^{\alpha_2}} = \frac{2}{2^{(\alpha_1-1)(n-1)}} + \frac{1}{n^{\alpha_2}}.$$

Тогда имеем:

$$k(t,s) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} 9\lambda_n \cdot 2^n \leqslant 9\sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n \cdot 2^n + 18 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha_1-1}}\right)^{n-1} + 9 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha_2}} < \infty, \;\; t,s \in [0,1],$$

т.е. $k(t,s)$ является неотрицательной непрерывной функцией на $[0,1]^2$.

Пусть K интегральный оператор с ядром $k(t,s)$. Тогда

$$(H\psi_n, \psi_n) = (U\psi_n, \psi_n) - (K\psi_n, \psi_n) = \int_0^1 u(t)|\psi_n(t)|^2 dt - \lambda_n =$$

$$= \int_{q_n'}^{q_n} u(t)|\psi_n(t)|^2 dt - \left(u_n + \frac{1}{2^n n^{\alpha_2}}\right) \leqslant \max_{\xi \in [q_n', q_n]} u(\xi) \int_{q_n'}^{q_n} \psi_n^2(t) dt - \left(u_n + \frac{1}{2^n n^{\alpha_2}}\right) =$$

$$= \max_{\xi \in [q_n', q_n]} u(\xi) - \left(u_n + \frac{1}{2^n n^{\alpha_2}}\right) = -\frac{1}{2^n n^{\alpha_2}}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и в силу теоремы 3.3 из [13] (о достаточном условии бесконечности дискретного спектр в модели Фридрихса) получим, что оператор H (1) имеет счетное число отрицательных собственных значений.

Литература

[1] Дынкин Е.М, Набоко С.Н, Яковлев С.И. Граница конечности сингулярного спектра в самосопряженной модели Фридрихса //Алгебра и анализ. — 1991. — Т.3, №2.— С. 77–90.

[2] Имомкулов С.А., Лакаев С.Н. Дискретный спектр одномерной модели Фридрихса //Докл.АН УзСССР. — 1988. — №7. — С. 9–11.

[3] Ладыженская О.А., Фаддеев Л.Д. К теории возмущений непрерывного спектра //Докл.АН СССР. — 1962. — Т.145, №2. — С. 301–304.

[4] Лакаев С.Н. О дискретном спектре обобщенной модели Фридрихса //Докл. АН УзССР. — 1979. — №4. — С.9–10.

[5] Лакаев С.Н. Некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса //Тр.семинара Н.Г.Петровского. — 1986. — №11. — С. 210–238.

[6] Лакаев С.Н., Минлос Р.А. О связанных состояний кластерного оператора //ТМФ. — 1979. — Т.39, №1. — С. 83–93.

[7] Минлос Р.А., Синай Я.Г. Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа //ТМФ. — 1970. — Т.2, №2. — С. 230–243.

[8] Набоко С.Н., Яковлев С.И. Об условиях конечности сингулярного спектра в самосопряженной модели Фридрихса //Функ.анализ и его прил. — 1990. — Т.24, №4. — С. 88–89.

[9] Павлов Б.С., Петрас С.В. О сингулярном спектре слабо возмущенного оператора умножения // Функ.анализ и его прил. 1970. — Т.4, №2. — С. 54–61.

[10] Рид Н., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4: Анализ операторов. — М: Мир, 1982.

[11] Фаддеев Л.Д. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного сектра /Краевые задачи математической физики. Сборник работ. Посвящается памяти В.А. Стенлова в связи со столетием со дня его рождения //Тр. МИАН СССР. Т.73. М.-Л.: Наука, 1964. С. 292–313.

[12] Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мир, 1970.

[13] Эшкабилов Ю.Х. О бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрихса //Мат.труды. — 2011. — Т.14, №1. — С. 195–211.

[14] Яковлев С.И. Граница конечности сингулярного спектра в окрестности особой точки операторов модели Фридрихса //Алгебра и анализ. — 1998. — Т.10, №4. — С. 210–237.

[15] Яковлев С.И. Теорема единственности и сингулярный спектр в модели Фридрихса около особой точки// Алгебра и анализ. — 2003. — Т.15, №1. — С. 215–239.

[16] Abdullaev J.I., Lakaev S.N. On the spectral properties of the matri-valued Friedrichs model /Many-Particle Hamiltonians: Spectra and Scattering //Adv. Soviet Math.Providence, RI: Amer.Math.Soc., — 1991. — V.5. — P. 1–37.

[17] Friedrichs K.O. Uber die Spectralzerlegung eines Integral Operators //Math. Ann. — 1938. — V.115, №1. — P. 249–272.