НАНОСИСТЕМЫ: ФИЗИКА, ХИМИЯ, МАТЕМАТИКА, 2011, 2 (2), С. 15–31

**УДК 517.938**

# КВАНТОВОЕ КОЛЬЦО С ПРОВОДНИКОМ: МОДЕЛЬ ДВУХЧАСТИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Д. А. Еремин[1], И. Ю. Попов[2]

[1]Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева
[2]Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики
ereminda@mail.ru, popov1955@gmail.com

**PACS 02.30.Tb, 03.65.Nk**

Построены операторы, описывающие поведение двух частиц с $\delta-$взаимодействием на прямой и в кольце. С помощью полученных операторов описана двухчастичная модель проводника с квантовым кольцом. Спектр полученного оператора численно исследован на наличие дополнительных точечных уровней. Проведено сравнение результата (при условии малой интенсивности взаимодействия между частицами) с результатом для аналогичной одночастичной задачи.

**Ключевые слова:** уравнение Шредингера, симметрические операторы, теория Крейна, самосопряженные расширения, функция Грина.

## 1. Введение

Современное развитие наноэлектроники делает необходимой задачу теоретического исследования различных квантовых наносистем. В некоторых случаях адекватной моделью таких систем является квантовый граф.

Математическая теория одночастичных задач для квантовых графов достаточно хорошо развита. В то же время, многочастичные задачи рассматривались только для некоторых простых типов систем. Так, например, Ю.Б. Мельников и Б.С. Павлов изучали двухчастичное рассеяние на $Y$-образном графе [1], а М. Хармер в работах [2, 3] рассматривал поведение двух частиц с $\delta$-взаимодействием на «звездном» графе с $n$ ребрами. В перечисленных статьях авторы имели дело с соединением структур одинаковой геометрии.

Построение и исследование многочастичных математических моделей является более сложной задачей по сравнению с одночастичными, поскольку размерность конфигурационного пространства многократно возрастает в зависимости от числа частиц. С другой стороны, без учета взаимодействия частиц невозможно эффективно моделировать многие наноустройства, в частности, элементы квантового компьютера.

В данной работе строится математическая модель для двухчастичной задачи в устройстве, состоящем из квантового кольца и проводника. Используем технику теории расширений симметрических операторов. При этом необходимо сначала описать поведение двух взаимодействующих частиц в проводнике и в кольце отдельно.

## 2. Поведение двух взаимодействующих частиц на прямой

Гамильтониан системы двух невзаимодействующих частиц на прямой может быть записан в виде

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

с пространством состояний $D(H_0) = H^2(\mathbb{R}^2)$. Для удобства воспользуемся системой единиц, в которой $\hbar = 1$, $m = 1$.

Функция Грина оператора $H_0$ представима в виде

$$G_0(x, y, x_0, y_0; z) = \frac{1}{\pi} K_0\left(\sqrt{-2z}\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right), \ z \in \mathbb{C}\backslash[0; +\infty), \tag{1}$$

здесь $K_0$ — функция Макдональда.

Оператор $H_1$, описывающий поведение двух взаимодействующих частиц на прямой (взаимодействие считается точечным), формально может быть записан в виде

$$H_1 = H_0 + l\delta(y - x),$$

где $l$ — интенсивность взаимодействия частиц между собой.

Оператор $H_1$ строим с помощью техники теории расширений операторов [4], позволяющей математически корректноописывать взаимодействие, сосредоточенное на множестве нулевой меры, в нашем случае — на линии. В последнее время для подобных взаимодействий закрепилось название «липкие» квантовые графы [5]. Они рассматривались многими авторами [6–16].

Рассматриваем сужение $S$ оператора $H_0$ на множество функций, равных нулю на диагонали конфигурационного пространства, то есть

$$D(S) = \{\psi \in D(H_0) : \psi(x, x) = 0\}.$$

Оператор $S$ — симметрический, он описывает две изолированные частицы на прямой. Введем вспомогательное гильбертово пространство $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G} = H^1(\mathbb{R}).$$

**Теорема 1.** *$\Gamma$-поле и $Q$-функция пары операторов $(S, H_0)$ действуют по правилу*

$$\forall f \in \mathcal{G} \quad \Gamma(z)f = \int\limits_{\mathbb{R}} G_0(x, y, x_0, x_0; z) f(x_0) dx_0,$$

$$Q(z)f = \int\limits_{\mathbb{R}} (G_0(x, x, x_0, x_0; z) - G_0(x, x, x_0, x_0; -1)) f(x_0) dx_0.$$

*Доказательство.* Проверим последовательно все условия на $\Gamma$-поле и $Q$-функцию из определения.

Рассмотрим интегральное выражение $\Gamma(z)f(x)$ и, используя неравенство Шварца, покажем абсолютную сходимость интеграла. При $x \neq y$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |G_0(x, y, x_0, x_0; z) f(x_0)| \, dx_0 \leqslant$$

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|G_0(x, y, x_0, x_0; z)|^2}{1 + x_0^2} dx_0\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left(1 + x_0^2\right) |f(x_0)|^2 \, dx_0\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \pi^{1/2} M \cdot ||f||_{H^1}.$$

При $x = y$ функция Грина $G_0(x, y, x_0, x_0; z)$ имеет логарифмическую особенность при $x \to x_0$. Вычитая сингулярное слагаемое, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |G_0(x, x, x_0, x_0; z) f(x_0)|\, dx_0 \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \left( G_0(x, x, x_0, x_0; z) - \frac{1}{\pi} \ln\left( \sqrt{2|z|}|x - x_0| \right) \right) f(x_0) \right| dx_0 +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\pi} \ln\left( \sqrt{2|z|}|x - x_0| \right) f(x_0) \right| dx_0 \leqslant$$
$$\leqslant \left( \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\left| G_0(x, x, x_0, x_0; z) - \frac{1}{\pi} \ln\left( \sqrt{2|z|}|x - x_0| \right) \right|^2}{1 + x_0^2} dx_0 \right)^{1/2} \cdot ||f||_{H^1} +$$
$$+ \left( \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\ln^2\left( \sqrt{2|z|}|x - x_0| \right)}{\pi^2(1 + x_0^2)} dx_0 \right)^{1/2} \cdot ||f||_{H^1}.$$

Разбивая область интегрирования в последнем интеграле и производя замену переменной $t = x - x_0$, получаем оценку

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |G_0(x, x, x_0, x_0; z) f(x_0)|\, dx_0 \leqslant$$
$$\leqslant \left( M + \left( \frac{1}{8\pi^2} \left( \pi^3 + 32 + (\pi + 4) \ln^2(2|z|) \right) \right)^{1/2} \right) \cdot ||f||_{H^1}.$$

Таким образом, для оператора $\Gamma(\zeta)$ получаем

$$\Gamma(\zeta) f(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{\imath n(x - x_0)} e^{\imath m(y - x_0)}}{m^2 + n^2 - 2\zeta} dndm f(x_0) dx_0 =$$
$$= \frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{\imath nx} e^{\imath my}}{m^2 + n^2 - 2\zeta} \widehat{f}(n + m) dndm,$$

где $\widehat{f}$ — преобразование Фурье функции $f$.

Проводя аналогичные рассуждения для оператора $R_0(z)$, мы можем записать

$$R_0(z)\Gamma(\zeta) f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{\imath mx} e^{\imath ny}}{m^2 + n^2 - 2z} \times$$
$$\times \left[ \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{\imath(s - m)x_0} e^{\imath(t - n)y_0}}{s^2 + t^2 - 2\zeta} \widehat{f}(s + t) dsdtdx_0dy_0 \right] dmdn$$

Меняя порядок интегрирования во внутреннем интеграле, получаем

$$R_0(z)\Gamma(\zeta)f(x)=\frac{4}{(2\pi)^{3/2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{\imath mx}e^{\imath ny}}{m^2+n^2-2z}\times$$
$$\times\left[\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\widehat{f}(s+t)}{s^2+t^2-2\zeta}\delta(s-m,t-n)dsdt\right]dmdn=$$
$$=\frac{4}{(2\pi)^{3/2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{\imath mx}e^{\imath ny}}{m^2+n^2-2z}\cdot\frac{\widehat{f}(m+n)}{m^2+n^2-2\zeta}dmdn$$

Вычисляя значение выражения $\Gamma(z)-\Gamma(\zeta)$, находим

$$\Gamma(z)-\Gamma(\zeta)=\frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{\imath nx}e^{\imath my}}{m^2+n^2-2z}\widehat{f}(n+m)dndm-$$
$$-\frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{\imath nx}e^{\imath my}}{n^2+m^2-2\zeta}\widehat{f}(n+m)dndm=$$
$$=\frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{(2z-2\zeta)e^{\imath nx}e^{\imath my}}{m^2+n^2-2z}\cdot\frac{\widehat{f}(n+m)}{m^2+n^2-2\zeta}dndm=$$
$$=(z-\zeta)\frac{4}{(2\pi)^{3/2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{\imath nx}e^{\imath my}}{m^2+n^2-2z}\cdot\frac{\widehat{f}(n+m)}{m^2+n^2-2\zeta}dndm=$$
$$=(z-\zeta)R_0(z)\Gamma(\zeta)f(x)$$

Следовательно, $\Gamma(z)$ является $\Gamma$-полем пары операторов $(S,H_0)$.
Справедлива оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\big(G_0(x,x,x_0,x_0;z)-G_0(x,x,x_0,x_0;-1)\big)f(x_0)\right|dx_0\leqslant$$
$$\leqslant\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{|G_0(x,x,x_0,x_0;z)-G_0(x,x,x_0,x_0;-1)|^2}{1+x_0^2}dx_0\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\left(1+x_0^2\right)|f(x_0)|^2\,dx_0\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\pi^{1/2}\left|\frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{(m^2+n^2-2z)(m^2+n^2+1)}dmdn\right|\cdot||f||_{H^1}=$$
$$=\frac{1}{2\pi^{1/2}}\left|\frac{\ln(-2z)}{2z-1}\right|\cdot||f||_{H^1}.$$

Отсюда

$$Q(z)f(x)=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\Bigg(\frac{e^{\imath(m+n)(x-x_0)}}{m^2+n^2-2z}-\frac{e^{\imath(m+n)(x-x_0)}}{m^2+n^2+1}\Bigg)dmdnf(x_0)dx_0=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\Bigg(\frac{e^{\imath(m+n)x}}{m^2+n^2-2z}-\frac{e^{\imath(m+n)x}}{m^2+n^2+1}\Bigg)\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-\imath(m+n)x_0}f(x_0)dx_0dmdn= \tag{2}$$

$$=\frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{e^{\imath(m+n)x}}{m^2+n^2-2z}-\frac{e^{\imath(m+n)x}}{m^2+n^2+1}\right)\widehat{f}(m+n)dmdn.$$

Действуя так же, как при выводе формулы для $R_0(z)\Gamma(\zeta)f(x)$, получаем для $\Gamma^*(\zeta)\Gamma(z)$

$$\Gamma^*(\zeta)\Gamma(z)f(x)=\frac{4}{(2\pi)^{7/2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{\imath m(x-x_0)}e^{\imath n(x-y_0)}}{m^2+n^2-2\zeta^*}dmdn\times$$

$$\times\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{\imath sx_0}e^{\imath ty_0}}{s^2+t^2-2z}\widehat{f}(s+t)dsdtdx_0dy_0=$$

$$=\frac{4}{(2\pi)^{3/2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{\imath mx}e^{\imath nx}}{m^2+n^2-2\zeta^*}\cdot\frac{\widehat{f}(m+n)}{m^2+n^2-2z}dmdn.$$

Используя (2), находим

$$(Q(z)-Q^*(\zeta))\,f(x)=$$

$$=\frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{(2z-2\zeta^*)e^{\imath(m+n)x}}{(m^2+n^2-2z)(m^2+n^2-2\zeta^*)}\widehat{f}(m+n)dmdn=$$

$$=(z-\zeta^*)\frac{4}{(2\pi)^{3/2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{\imath(m+n)x}\widehat{f}(m+n)}{(m^2+n^2-2z)(m^2+n^2-2\zeta^*)}dmdn=$$

$$=(z-\zeta^*)\Gamma^*(\zeta)\Gamma(z)f(x).$$

Таким образом, все свойства Γ-поля и $Q$-функции проверены. Теорема доказана. □

Гамильтониан системы — две взаимодействующие частицы на прямой — мы рассматриваем как самосопряженное расширение оператора $S$. Обозначим через $R(z)$, $R_0(z)$ резольвенты $H_1$ и $H_0$, соответственно. Тогда по формуле Крейна получаем

$$R(z)=R_0(z)-\Gamma(z)\left[Q(z)+A\right]^{-1}\Gamma^*\big(\overline{z}\big), \tag{3}$$

где $A=\dfrac{2}{l}$ — параметр, характеризующий самосопряженные расширения оператора $S$.

Подействовав на равенство (3) слева прямым преобразованием Фурье, а справа — обратным, можно переписать его в виде

$$\widetilde{R}(z)=\widetilde{R}_0(z)-\widetilde{\Gamma}(z)\left[\widetilde{Q}(z)+A\right]^{-1}\widetilde{\Gamma^*}\big(\overline{z}\big), \tag{3$'$}$$

здесь

$$\begin{aligned}&\widetilde{R}=\mathcal{F}_2R\mathcal{F}_2^{-1}, \quad \widetilde{R}_0=\mathcal{F}_2R_0\mathcal{F}_2^{-1},\\ &\widetilde{\Gamma}=\mathcal{F}_2\Gamma\mathcal{F}_1^{-1}, \quad \widetilde{\Gamma^*}=\mathcal{F}_1\Gamma^*\mathcal{F}_2^{-1},\\ &\widetilde{Q}=\mathcal{F}_1Q\mathcal{F}_1^{-1},\end{aligned} \tag{4}$$

где $\mathcal{F}_j$ — $j$-мерное преобразование Фурье.

Вычислим действия операторов (4). Используя (1), получаем

$$\left(Q\mathcal{F}_1^{-1}\right)\widehat{f}(p)=\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{\pi}K_0(\sqrt{-2z}|x-x_0|)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\widehat{f}(p)e^{\imath px_0}dpdx_0=$$
$$=\frac{2}{(2\pi)^{5/2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(p)\iint\limits_{\mathbb{R}^2}e^{\imath(m+n)x}\frac{e^{\imath(p-(m+n))x_0}}{m^2+n^2-2z}dmdndx_0dp.$$

Тогда

$$\widetilde{Q}\widehat{f}(p)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\widehat{f}(q)\frac{e^{\imath qx}}{\sqrt{q^2-4z}}dqe^{-\imath px}dx=\frac{1}{\sqrt{p^2-4z}}\widehat{f}(p).$$

Получаем, что оператор $\left(\widetilde{Q}(z)+A\right)$ является оператором умножения, следовательно, обратный оператор $\left[\widetilde{Q}(z)+\widetilde{A}\right]^{-1}$ действует по правилу

$$\left[\widetilde{Q}(z)+A\right]^{-1}\widehat{f}(p)=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{p^2-4z}}+\frac{2}{l}}\widehat{f}(p)=\frac{l\sqrt{p^2-4z}}{l+2\sqrt{p^2-4z}}\widehat{f}(p).$$

Аналогично вычисляем действие оператора $\widetilde{\Gamma}$.

$$\Gamma\mathcal{F}_1^{-1}\widehat{f}(p)=\frac{2}{(2\pi)^{5/2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(p)\iint\limits_{\mathbb{R}^2}e^{\imath mx}e^{\imath ny}\frac{e^{\imath(p-(m+n))x_0}}{m^2+n^2-2z}dmdndx_0dp=$$
$$=\frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(p)\frac{e^{\imath\frac{p+t}{2}x}e^{\imath\frac{p-t}{2}y}}{p^2+t^2-4z}dtdp.$$

Тогда

$$\widetilde{\Gamma}\widehat{f}(p)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(n)\frac{e^{\imath\frac{n+t}{2}x}e^{\imath\frac{n-t}{2}y}}{n^2+t^2-4z}dtdne^{-\imath px}e^{-\imath qx}dxdy=$$
$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{p^2+q^2-2z}\widehat{f}(p+q).$$

Подобным же образом находим действие оператора $\widetilde{\Gamma^*}$.

$$\Gamma^*\mathcal{F}_2^{-1}\widehat{f}(p,q)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\widehat{f}(p,q)e^{\imath(m+n)x}}{m^2+n^2-2z}\times$$
$$\times\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{\imath(p-m)x_0}e^{\imath(q-n)y_0}}{(2\pi)^2}dmdndx_0dy_0dpdq=$$
$$=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(p,q)\frac{e^{\imath(p+q)x}}{p^2+q^2-2z}dpdq.$$

Отсюда

$$\widetilde{\Gamma^*}\widehat{f}(p,q)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(m,n)\frac{e^{\imath(m+n)x}}{m^2+n^2-2z}dmdne^{-\imath px}dx=$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int\limits_{\mathbb{R}}\widehat{f}\left(\frac{p+t}{2},\frac{p-t}{2}\right)\frac{1}{p^2+t^2-4z}dt.$$

Оператора $\widetilde{R}_0$ действует по правилу.

$$R_0\mathcal{F}_2^{-1}\widehat{f}(p,q)=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{\pi}K_0(\sqrt{-2z}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(p,q)e^{\imath px_0}e^{\imath qy_0}dpdqdx_0dy_0=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(p,q)\frac{e^{\imath px}e^{\imath qy}}{p^2+q^2-2z}dpdq.$$

$$\widetilde{R}_0\widehat{f}(p,q)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\widehat{f}(m,n)\frac{e^{\imath mx}e^{\imath ny}}{m^2+n^2-2z}dmdne^{-\imath px}e^{-\imath qy}dxdy=$$

$$=\frac{2}{p^2+q^2-2z}\widehat{f}(p,q).$$

Подставляя полученные выражения для совокупности операторов (4) в формулу (3′), находим действие оператора $\widetilde{R}$.

$$\widetilde{R}\widehat{f}(p,q)=\frac{2}{p^2+q^2-2z}\widehat{f}(p,q)-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{p^2+q^2-2z}\cdot\frac{l\sqrt{p^2-4z}}{l+2\sqrt{p^2-4z}}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{(p+q)^2+t^2-4z}\widehat{f}\left(\frac{p+q+t}{2},\frac{p+q-t}{2}\right)dt.$$

Теперь мы можем найти резольвенту $R$ оператора $H_1$. Получаем

$$Rf(x,y)=\mathcal{F}_2^{-1}\widetilde{R}\mathcal{F}_2f(x,y)=\mathcal{F}_2^{-1}\widetilde{R}\widehat{f}(p,q)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{2}{p^2+q^2-2z}\widehat{f}(p,q)-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{p^2+q^2-2z}\cdot\frac{l\sqrt{(p+q)^2-4z}}{l+2\sqrt{(p+q)^2-4z}}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{(p+q)^2+t^2-4z}\widehat{f}\left(\frac{p+q+t}{2},\frac{p+q-t}{2}\right)dt\right)e^{\imath px}e^{\imath qy}dpdq=$$

$$=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}f(x_0,y_0)\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2\pi^2}\frac{e^{\imath p(x-x_0)}e^{\imath q(y-y_0)}}{p^2+q^2-2z}dpdqdx_0dy_0-$$

$$-\iint\limits_{\mathbb{R}^2}f(x_0,y_0)\frac{1}{2\pi^3}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{e^{\imath px}e^{\imath qy}}{p^2+q^2-2z}\cdot\frac{l\sqrt{(p+q)^2-4z}}{l+2\sqrt{(p+q)^2-4z}}e^{-\imath\frac{p+q}{2}(x_0+y_0)}\times$$

$$\times\frac{\pi}{\sqrt{(p+q)^2-4z}}e^{-\frac{|y_0-x_0|}{2}\sqrt{(p+q)^2-4z}}dpdqdx_0dy_0.$$

Учитывая (1), имеем

$$Rf(x,y) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} G_0(x,y,x_0,y_0;z) f(x_0,y_0)dx_0dy_0 -$$

$$-\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_0,y_0)\frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{\imath\frac{s+t}{2}x}e^{\imath\frac{s-t}{2}y}}{s^2+t^2-4z}\cdot\frac{l}{l+2\sqrt{s^2-4z}}e^{-\imath\frac{s}{2}(x_0+y_0)}\times$$

$$\times e^{-\frac{|y_0-x_0|}{2}\sqrt{s^2-4z}}dsdtdx_0dy_0 =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} G_0(x,y,x_0,y_0;z) f(x_0,y_0)dx_0dy_0 -$$

$$-\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} f(x_0,y_0)\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{le^{\imath\frac{s}{2}\left(x+y-(x_0+y_0)\right)}}{\left(l+2\sqrt{s^2-4z}\right)\sqrt{s^2-4z}}e^{-\frac{|x-y|+|x_0-y_0|}{2}\sqrt{s^2-4z}}dsdx_0dy_0.$$

Таким образом, функция Грина $G_1(x,y,x_0,y_0;z)$ оператора $H_1$, описывающего поведение двух взамодействующих частиц на прямой, имеет вид

$$G_1(x,y,x_0,y_0;z) = \frac{1}{\pi}K_0\left(\sqrt{-2z}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{le^{\imath\frac{s}{2}\left(x+y-(x_0+y_0)\right)}}{\left(l+2\sqrt{s^2-4z}\right)\sqrt{s^2-4z}}e^{-\frac{|x-y|+|x_0-y_0|}{2}\sqrt{s^2-4z}}ds,\ z\in\mathbb{C}\backslash[0;+\infty). \tag{5}$$

## 3. Поведение двух взаимодействующих частиц в кольце

Аналогично случаю на прямой, строим гамильтониан $H_r$, описывающий поведение двух взаимодействующих частиц в кольце (на окружности радиуса $\rho$). Для этого рассматриваем гамильтониан $H_{r,0}$, описывающий поведение двух невзаимодействующих частиц в кольце. Он имеет следующий вид

$$H_{r,0} = -\frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi_2^2}\right),$$

где $\rho$ — радиус кольца, с пространством состояний

$$D(H_{r,0}) = \left\{\psi\in H^2\left(\mathrm{T}^2\right) : \psi|_{\varphi_j=-\pi} = \psi|_{\varphi_j=\pi}, \frac{\partial\psi}{\partial\varphi_j}\Big|_{\varphi_j=-\pi} = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi_j}\Big|_{\varphi_j=\pi}\right\},$$

здесь $\mathrm{T} = [-\pi,\pi]$.

Функцию Грина имеем в виде

$$G_0(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_1'.\varphi_2';z) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n,m}\frac{e^{\imath m(\varphi_1-\varphi_1')}e^{\imath n(\varphi_2-\varphi_2')}}{m^2+n^2-2z\rho^2}. \tag{6}$$

Оператор $H_r$, описывающий поведение двух взаимодействующих частиц в кольце, формально может быть записан в виде

$$H_r = H_{r,0} + l\delta\left(\rho(\varphi_2-\varphi_1)\right).$$

Построение оператора $H_r$ производим с помощью техники «сужения — расширения» симметрических операторов, поэтому рассматриваем сужение $S$ оператора $H_{r,0}$ на множество функций, обращающихся в нуль на диагонали конфигурационного пространства, то есть

$$D(S)=\{\psi\in D(H_{r,0}):\psi(\varphi,\varphi)=0,\varphi\in \mathrm{T}\}.$$

Пусть $\mathcal{G}'$ — гильбертово пространство

$$\mathcal{G}'=H^1(\mathrm{T}),$$

тогда справедлива теорема.

**Теорема 2.** *$\Gamma$-поле и $Q$-функция операторов $(S,H_{r_0})$, действуют по правилу*

$$\forall f\in\mathcal{G}'\quad \Gamma(z)f=\int\limits_{\mathrm{T}}G_0(\varphi_1,\varphi_2,\varphi',\varphi';z)f(\varphi')\rho d\varphi',$$

$$Q(z)f=\int\limits_{\mathrm{T}}(G_0(\varphi,\varphi,\varphi',\varphi';z)-G_0(\varphi,\varphi,\varphi',\varphi';-1))f(\varphi')\rho d\varphi'.$$

Гамильтониан системы — две взаимодействующие частицы в кольце — мы рассматриваем как самосопряженное расширение оператора $S$. Обозначим через $R(z)$, $R_{r,0}(z)$ резольвенты $H_r$ и $H_{r,0}$, соответственно, тогда мы можем снова записать формулу Крейна (3) и ее же в преобразованном виде (3′), только здесь $\mathcal{F}_j$ — $j$-мерное дискретное преобразование Фурье на отрезке.

Найдем соответствующие операторы (4).

$$\left(Q\mathcal{F}_1^{-1}\right)\widehat{f}(p)=\int\limits_{\mathrm{T}}\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n,m}\frac{e^{\imath(n+m)\varphi}e^{-\imath(n+m)\varphi'}}{n^2+m^2-2z\rho^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_p\widehat{f}(p)e^{\imath p\varphi'}\rho d\varphi'=$$
$$=\frac{2\rho}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{n,m}e^{\imath(m+n)\varphi}\frac{1}{m^2+n^2-2z\rho^2}\widehat{f}(m+n).$$
$$\widetilde{Q}\widehat{f}(p)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int\limits_{\mathrm{T}}\frac{2\rho}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{n,m}\frac{e^{\imath(m+n)\varphi}}{m^2+n^2-2z\rho^2}\widehat{f}(m+n)e^{-\imath p\varphi}d\varphi=$$
$$=\frac{\rho}{2\pi}\widehat{f}(p)\sum_n\frac{1}{\left(n-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{4}-z\rho^2}.$$

Используя формулы 5.1.25.4 и 5.1.26.1 из [17], находим

$$\widetilde{Q}\widehat{f}(p)=\frac{\rho\widehat{f}(p)}{\sqrt{p^2-4z\rho^2}}\begin{cases}\operatorname{cth}\left(\pi\sqrt{p^2-4z\rho^2}/2\right), & p=2m, m\in\mathbb{Z},\\ \operatorname{th}\left(\pi\sqrt{p^2-4z\rho^2}/2\right), & p=2m+1, m\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Получаем, что оператор $\left(\widetilde{Q}(z)+\widetilde{A}\right)$ является оператором умножения, следовательно обратный оператор $\left[\widetilde{Q}(z)+\widetilde{A}\right]^{-1}$ действует по правилу

$$\left[\widetilde{Q}(z)+\widetilde{A}\right]^{-1}\widehat{f}(p)=\frac{1}{a_p(z)+\frac{2\rho}{l}}\widehat{f}(p)=\frac{l}{la_p(z)+2\rho}\widehat{f}(p),$$

где

$$a_p(z)=\frac{\rho}{\sqrt{p^2-4z\rho^2}}\begin{cases}\operatorname{cth}\left(\pi\sqrt{p^2-4z\rho^2}/2\right), & p=2m, m\in\mathbb{Z},\\ \operatorname{th}\left(\pi\sqrt{p^2-4z\rho^2}/2\right), & p=2m+1, m\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Вычисляем действие оператора $\widetilde{\Gamma}$.

$$\Gamma\mathcal{F}_1^{-1}\widehat{f}(p)=\int\limits_{\mathrm{T}}\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n,m}\frac{e^{\imath m(\varphi_1-\varphi')}e^{\imath n(\varphi_2-\varphi')}}{m^2+n^2-2z\rho^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_p\widehat{f}(p)e^{\imath p\varphi'}\rho d\varphi'=$$

$$=\frac{2\rho}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{n,m}\frac{e^{\imath m\varphi_1}e^{\imath n\varphi_2}}{m^2+n^2-2z\rho^2}\widehat{f}(m+n).$$

$$\widetilde{\Gamma}\widehat{f}(p)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathrm{T}^2}\frac{2\rho}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{n,m}\frac{e^{\imath m\varphi_1}e^{\imath n\varphi_2}\widehat{f}(m+n)}{m^2+n^2-2z\rho^2}e^{-\imath p\varphi_1}e^{-\imath q\varphi_2}d\varphi_1d\varphi_2=$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\frac{\rho}{p^2+q^2-2z\rho^2}\widehat{f}(p+q).$$

Находим действие оператора $\widetilde{\Gamma^*}$.

$$\Gamma^*\mathcal{F}_2^{-1}\widehat{f}(p,q)=\iint\limits_{\mathrm{T}^2}\frac{1}{4\pi^3}\sum_{n,m}\frac{e^{\imath m(\varphi-\varphi_1)}e^{\imath n(\varphi-\varphi_2)}}{m^2+n^2-2z\rho^2}\sum_{p,q}\widehat{f}(p,q)e^{\imath p\varphi_1}e^{\imath q\varphi_2}\rho^2d\varphi_1d\varphi_2=$$

$$=\frac{\rho^2}{\pi}\sum_{n,m}\frac{e^{\imath(m+n)\varphi}}{m^2+n^2-2z\rho^2}\widehat{f}(m,n).$$

$$\widetilde{\Gamma^*}\widehat{f}(p,q)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int\limits_{\mathrm{T}}\frac{\rho^2}{\pi}\sum_{n,m}\frac{e^{\imath(m+n)\varphi}}{m^2+n^2-2z\rho^2}\widehat{f}(m,n)e^{-\imath px}dx=$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\sum_m\frac{\rho^2}{m^2+(p-m)^2-2z\rho^2}\widehat{f}(m,p-m)=$$

Таким образом, оператор $\widetilde{\Gamma}\left[\widetilde{Q}+\widetilde{A}\right]^{-1}\widetilde{\Gamma^*}$ действует по правилу

$$\widetilde{\Gamma}\left[\widetilde{Q}+\widetilde{A}\right]^{-1}\widetilde{\Gamma^*}\widehat{f}(p,q)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{l\rho^3}{p^2+q^2-2z\rho^2}\cdot\frac{1}{la_{p+q}+2\rho}\times$$

$$\sum_m\frac{\widehat{f}(m,p+q-m)}{m^2+(p+q-m)^2-2z\rho^2}.$$

Отсюда находим, что оператор $\Gamma\left[Q+A\right]^{-1}\Gamma^*$ действует по правилу

$$\Gamma\left[Q+A\right]^{-1}\Gamma^*f(\varphi_1,\varphi_2)=\mathcal{F}_2^{-1}\widetilde{\Gamma}\left[\widetilde{Q}+\widetilde{A}\right]^{-1}\widetilde{\Gamma^*}\mathcal{F}_2f(\varphi_1,\varphi_2)=$$

$$=\iint\limits_{\mathrm{T}^2}\frac{1}{\pi^3}\sum_{s,t}\frac{k\rho}{s^2+t^2-4z\rho^2}\cdot\frac{1}{ka_s+2\rho}e^{\imath\frac{s+t}{2}\varphi_1}e^{\imath\frac{s-t}{2}\varphi_2}\times$$

$$\times\sum_m\frac{e^{\imath(\varphi_2'-\varphi_1')m}e^{\imath s\varphi_2'}}{m^2+(s-m)^2-2z\rho^2}f(\varphi_1',\varphi_2')\rho^2d\varphi_1'd\varphi_2'=$$

Подставляя полученные выражения в формулу (3), находим резольвенту $R$ оператора $H_r$.

$$Rf(\varphi_1,\varphi_2)=\iint\limits_{\mathrm{T}^2} G_0(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_1',\varphi_2';z)f(\varphi_1',\varphi_2')\rho^2 d\varphi_1' d\varphi_2' -$$
$$-\iint\limits_{\mathrm{T}^2}\frac{1}{\pi^3}\sum_{s,t}\frac{l\rho}{s^2+t^2-4z\rho^2}\cdot\frac{1}{la_s+2\rho}e^{\imath\frac{s+t}{2}\varphi_1}e^{\imath\frac{s-t}{2}\varphi_2}\times$$
$$\times\sum_m \frac{e^{\imath(\varphi_2'-\varphi_1')m}e^{\imath s\varphi_2'}}{m^2+(s-m)^2-2z\rho^2}f(\varphi_1',\varphi_2')\rho^2 d\varphi_1' d\varphi_2'.$$

Таким образом, функция Грина $G_r(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_1',\varphi_2';z)$ оператора $H_r$, описывающего поведение двух взамодействующих частиц в кольце, имеет вид

$$G_r(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_1',\varphi_2';z)=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n,m}\frac{e^{\imath m(\varphi_1-\varphi_1')}e^{\imath n(\varphi_2-\varphi_2')}}{m^2+n^2-2z\rho^2}-$$
$$-\frac{1}{\pi^3}\sum_{s,t}\frac{l\rho}{s^2+t^2-4z\rho^2}\cdot\frac{1}{la_s+2\rho^2}e^{\imath\frac{s+t}{2}\varphi_1}e^{\imath\frac{s-t}{2}\varphi_2}\times \tag{7}$$
$$\times\sum_m\frac{e^{\imath(\varphi_2'-\varphi_1')m}e^{\imath s\varphi_2'}}{m^2+(s-m)^2-2z\rho^2}\ z\in\mathbb{C}\backslash[0;+\infty).$$

## 4. Двухчастичная модель квантового кольца с проводником

Введем два вспомогательных оператора

$$H_2=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right),\quad D(H_2)=\left\{\psi\in H^2\left(\mathbb{R}\times\mathrm{T}\right)\right\},$$
$$H_3=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right),\quad D(H_3)=\left\{\psi\in H^2\left(\mathrm{T}\times\mathbb{R}\right)\right\},$$

описывающих поведение одной из частиц в кольце, а другой — в проводнике.

Конфигурационными пространствами для данных операторов будут цилиндры. С помощью данных цилиндров будем осуществлять склейку плоскости и тора — конфигурационных пространств для двухчастичных задач на прямой и в кольце, соответственно.

Функции Грина операторов $H_2$ и $H_3$ вычисляются аналогично функциям Грина на плоскости (1) и на торе (6) и имеет вид

$$G_{2,3}(x,\varphi,x',\varphi';z)=\frac{1}{2\pi^2\rho}\int\limits_{\mathbb{R}}\sum_m\frac{e^{\imath n(x-x')}e^{\imath m(\varphi-\varphi')}}{n^2+\frac{m^2}{\rho^2}-2z}dn. \tag{8}$$

Будем рассматривать систему, состоящую из квантового кольца и проводника. Схематически такая система изображена на рис. 1.

Пока контакт разомкнут, гамильтониан системы представляет собой прямую сумму

$$H_0=H_1\oplus H_2\oplus H_3\oplus H_r.$$

Включение контактов будем моделировать с помощью процедуры «сужение — расширение». С этой целью рассмотрим сужение

$$S=S_1\oplus S_2\oplus S_3\oplus S_r,$$

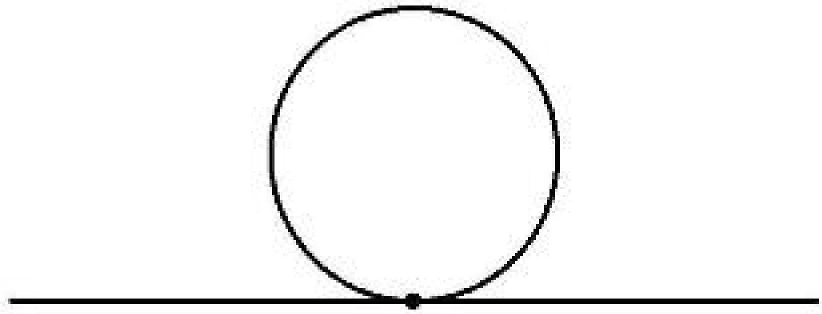

Рис. 1. Схематическое изображение системы

где

$$
\begin{aligned}
D(S_1) &= \{\psi \in D(H_1) : \psi(0,x) = 0, \psi(x,0) = 0\},\\
D(S_2) &= \{\psi \in D(H_2) : \psi(0,\varphi) = 0, \psi(x,0) = 0\},\\
D(S_3) &= \{\psi \in D(H_3) : \psi(\varphi,0) = 0, \psi(0,x) = 0\},\\
D(S_4) &= \{\psi \in D(H_4) : \psi(\varphi,0) = 0, \psi(0,\varphi) = 0\}.
\end{aligned}
$$

Оператор $S$ — симметрический, он описывает две частицы в системе изолированных кольца и канала, имеющих проколы в точках $x = 0$ (в канале) и $\varphi = 0$ (в кольце). Гамильтониан устройства с включенным контактом следует искать среди самосопряженных расширений полученного оператора, поэтому воспользуемся формулой Крейна. Введем для этого дефектные пространства

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_1 &= H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}),\\
\mathcal{G}_2 &= H^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathrm{T}),\\
\mathcal{G}_3 &= H^1(\mathrm{T}) \times H^1(\mathbb{R}),\\
\mathcal{G}_r &= H^1(\mathrm{T}) \times H^1(\mathrm{T}).
\end{aligned}
$$

Тогда отображение

$$\Gamma_1(z) : \mathcal{G}_1 \to L^2(\mathbb{R}),$$

определяемое путем

$$\forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{G}_1 \quad \Gamma_1(z)\xi = \begin{pmatrix} \Gamma_1^1(z) & \Gamma_1^2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \Gamma_1^1(z)\xi_1 + \Gamma_1^2(z)\xi_2,$$

где через $\Gamma_1^1(z)$ и $\Gamma_1^2(z)$ мы обозначили

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1^1(z) f(x,y) &= \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(x,y,x',0;z) f(x') dx',\\
\Gamma_1^2(z) f(x,y) &= \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(x,y,0,y';z) f(y') dy',
\end{aligned}
$$

представляет собой Γ-функцию Крейна пары операторов $(S_1, H_1)$. Соответствующая этой паре $Q$-функция Крейна задается оператором

$$Q_1(z)\xi = \begin{pmatrix} Q_1^{11}(z) & Q_1^{12}(z) \\ Q_1^{21}(z) & Q_1^{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

где

$$Q_1^{11}(z)f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(x, 0, x', 0; z) f(x') dx',$$

$$Q_1^{12}(z)f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(x, 0, 0, x'; z) f(x') dx',$$

$$Q_1^{21}(z)f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(0, x, x', 0; z) f(x') dx',$$

$$Q_1^{22}(z)f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(0, x, 0, x'; z) f(x') dx'.$$

Через $\Gamma_2(z)$ и $Q_2(z)$ обозначим Γ-функцию и $Q$-функцию Крейна пары операторов $(S_2, H_2)$:

$$\forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{G}_2 \quad \Gamma_2(z)\xi = \begin{pmatrix} \Gamma_2^1(z) & \Gamma_2^2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \Gamma_2^1(z)\xi_1 + \Gamma_2^2(z)\xi_2,$$

здесь

$$\Gamma_2^1(z)f(x, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_2(x, \varphi, x', 0; z) f(x') dx',$$

$$\Gamma_2^2(z)f(x, \varphi) = \int\limits_{\mathrm{T}} G_2(x, \varphi, 0, \varphi'; z) f(\varphi') \rho d\varphi'.$$

$$Q_2(z)\xi = \begin{pmatrix} Q_2^{11}(z) & Q_2^{12}(z) \\ Q_2^{21}(z) & Q_2^{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

где

$$Q_2^{11}(z)f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(x, 0, x', 0; z) f(x') dx',$$

$$Q_2^{12}(z)f(x) = \int\limits_{\mathrm{T}} G_1(x, 0, 0, \varphi'; z) f(\varphi') \rho d\varphi',$$

$$Q_2^{21}(z)f(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_1(0, \varphi, x', 0; z) f(x') dx',$$

$$Q_2^{22}(z)f(\varphi) = \int\limits_{\mathrm{T}} G_1(0, \varphi, 0, \varphi'; z) f(\varphi') \rho d\varphi'.$$

Для пары операторов $(S_3, H_3)$ имеем

$$\forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{G}_3 \quad \Gamma_3(z)\xi = \begin{pmatrix} \Gamma_3^1(z) & \Gamma_3^2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \Gamma_3^1(z)\xi_1 + \Gamma_3^2(z)\xi_2,$$

здесь

$$\Gamma_3^1(z)f(\varphi,x)=\Gamma_2^2(z)f(x,\varphi),\quad \Gamma_3^2(z)f(\varphi,x)=\Gamma_2^1(z)f(x,\varphi).$$

$$Q_3(z)\xi=\begin{pmatrix}Q_2^{22}(z) & Q_2^{21}(z)\\ Q_2^{12}(z) & Q_2^{11}(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}.$$

Для $\Gamma_r(z)$ и $Q_r(z)$ получаем следующие выражения

$$\forall\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathcal{G}_r\quad \Gamma_r(z)\xi=\begin{pmatrix}\Gamma_r^1(z) & \Gamma_r^2(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=\Gamma_r^1(z)\xi_1+\Gamma_r^2(z)\xi_2,$$

где

$$\Gamma_r^1(z)f(\varphi_1,\varphi_2)=\int\limits_{\mathrm{T}}G_r(\varphi_1,\varphi_2,\varphi',0;z)f(\varphi')\rho d\varphi',$$
$$\Gamma_r^2(z)f(\varphi_1,\varphi_2)=\int\limits_{\mathrm{T}}G_r(\varphi_1,\varphi_2,0,\varphi';z)f(\varphi')\rho d\varphi'.$$

$$Q_r(z)\xi=\begin{pmatrix}Q_r^{11}(z) & Q_r^{12}(z)\\ Q_r^{21}(z) & Q_r^{22}(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix},$$

где

$$Q_r^{11}(z)f(\varphi)=\int\limits_{\mathrm{T}}G_r(\varphi,0,\varphi',0;z)f(\varphi')\rho d\varphi',$$
$$Q_r^{12}(z)f(\varphi)=\int\limits_{\mathrm{T}}G_r(\varphi,0,0,\varphi';z)f(\varphi')\rho d\varphi',$$
$$Q_r^{21}(z)f(\varphi)=\int\limits_{\mathrm{T}}G_r(0,\varphi,\varphi',0;z)f(\varphi')\rho d\varphi',$$
$$Q_r^{22}(z)f(\varphi)=\int\limits_{\mathrm{T}}G_r(0,\varphi,0,\varphi';z)f(\varphi')\rho d\varphi'.$$

Для пары операторов $(S,H)$ $\Gamma$-функция и $Q$-функция Крейна задаются прямыми суммами

$$\Gamma(z)=\Gamma_1(z)\oplus\Gamma_2(z)\oplus\Gamma_3(z)\oplus\Gamma_r(z),$$
$$Q(z)=Q_1(z)\oplus Q_2(z)\oplus Q_3(z)\oplus Q_r(z).$$

Как упоминалось выше, гамильтониан системы — кольцо с двумя присоединенными каналами — мы рассматриваем как самосопряженные расширения оператора $S$. Обозначим это расширение через $H$, а через $R(z)$ — его резольвенту, тогда по формуле Крейна получаем

$$R(z)=R_0(z)-\Gamma(z)\left[Q(z)+A\right]^{-1}\Gamma^*\big(\overline{z}\big), \tag{9}$$

здесь $A$ — эрмитов оператор в пространстве $\mathcal{G}=\mathcal{G}_1\oplus\mathcal{G}_2\oplus\mathcal{G}_3\oplus\mathcal{G}_r$, параметризующий самосопряженные расширения оператора $S$. Он описывает характеристики контакта и его вид определяется условиями Кирхгофа:

$$\begin{cases} f_1(x,0) = \alpha\left(\frac{\partial f_1(x,0)}{\partial y_+} - \frac{\partial f_1(x,0)}{\partial y_-}\right) + \beta\left(\frac{\partial f_2(x,0)}{\partial \varphi_+} - \frac{\partial f_2(x,0)}{\partial \varphi_-}\right), \\ f_1(0,y) = \alpha\left(\frac{\partial f_1(0,y)}{\partial x_+} - \frac{\partial f_1(0,y)}{\partial x_-}\right) + \beta\left(\frac{\partial f_3(0,y)}{\partial \varphi_+} - \frac{\partial f_3(0,y)}{\partial \varphi_-}\right), \\ f_2(x,0) = \overline{\beta}\left(\frac{\partial f_1(x,0)}{\partial y_+} - \frac{\partial f_1(x,0)}{\partial y_-}\right) + \gamma\left(\frac{\partial f_2(x,0)}{\partial \varphi_+} - \frac{\partial f_2(x,0)}{\partial \varphi_-}\right), \\ f_2(0,\varphi) = \mu\left(\frac{\partial f_2(0,\varphi)}{\partial x_+} - \frac{\partial f_2(0,\varphi)}{\partial x_-}\right) + \eta\left(\frac{\partial f_4(0,\varphi)}{\partial \varphi_{1+}} - \frac{\partial f_4(0,\varphi)}{\partial \varphi_{1-}}\right), \\ f_3(\varphi,0) = \mu\left(\frac{\partial f_3(\varphi,0)}{\partial y_+} - \frac{\partial f_3(\varphi,0)}{\partial y_-}\right) + \nu\left(\frac{\partial f_4(\varphi,0)}{\partial \varphi_{2+}} - \frac{\partial f_4(\varphi,0)}{\partial \varphi_{2-}}\right), \\ f_3(0,y) = \overline{\beta}\left(\frac{\partial f_1(0,y)}{\partial x_+} - \frac{\partial f_2(0,y)}{\partial x_-}\right) + \gamma\left(\frac{\partial f_4(0,\varphi)}{\partial \varphi_{1+}} - \frac{\partial f_4(0,\varphi)}{\partial \varphi_{1-}}\right), \\ f_4(\varphi,0) = \overline{\eta}\left(\frac{\partial f_3(\varphi,0)}{\partial y_+} - \frac{\partial f_3(\varphi,0)}{\partial y_-}\right) + \nu\left(\frac{\partial f_4(\varphi,0)}{\partial \varphi_{2+}} - \frac{\partial f_4(\varphi,0)}{\partial \varphi_{2-}}\right), \\ f_4(0,\varphi) = \overline{\eta}\left(\frac{\partial f_2(0,\varphi)}{\partial x_+} - \frac{\partial f_2(0,\varphi)}{\partial x_-}\right) + \nu\left(\frac{\partial f_4(0,\varphi)}{\partial \varphi_{1+}} - \frac{\partial f_4(0,\varphi)}{\partial \varphi_{1-}}\right), \end{cases}$$

поэтому матрицу $A$ следует выбрать в виде

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ \overline{\beta} & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \eta & 0 \\ 0 & \overline{\beta} & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{\eta} & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\eta} & 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где внедиагональные элементы характеризуют идеальность контакта, а диагональные элементы — степень отклонения контакта от идеального.

## 5. Исследование модели на дополнительные энергетические уровни

Из формулы Крейна (9) следует, что в спектр оператора $H$ дополнительно войдут те $z$, при которых оператор $Q(z) + A$ необратим. Рассмотрим случай идеального контакта, то есть когда диагональные элементы матрицы $A$ равны нулю, а внедиагональные — равны между собой (пусть для определенности они равны $\beta$). Фактически, это будет означать, что при попадании частицы в контакт, она переходит из одной структуры в другую.

В этом случае основной энергетический уровень соответствующей одночастичной задачи может быть найден из уравнения

$$-\frac{1}{2z}\operatorname{cth}\left(\pi\rho\sqrt{-z}\right) - \beta^2 = 0.$$

Сравнивая численно полученное значение основного энергетического уровня двухчастичной задачи с основным энергетическим уровнем одночастичной задачи в зависимости от различных значений параметра $\beta$, можно сделать вывод, что при уменьшении (увеличении) значения параметра $\beta$, основной энергетический уровень двухчастичной задачи уменьшается(увеличивается), при этом аналогичное поведение наблюдается и у основного энергетического уровня одночастичной модели. Более того, основные энергетические уровни двухчастичной и одночастичной моделей отличается в два раза, что объясняется увеличением количества частиц.

Далее на рис. 2 и 3 представлены численно полученные энергетические уровни двухчастичных моделей с взаимодействием частиц и без него. Полагается, что $\beta = 0.1, \quad \rho = 1$.

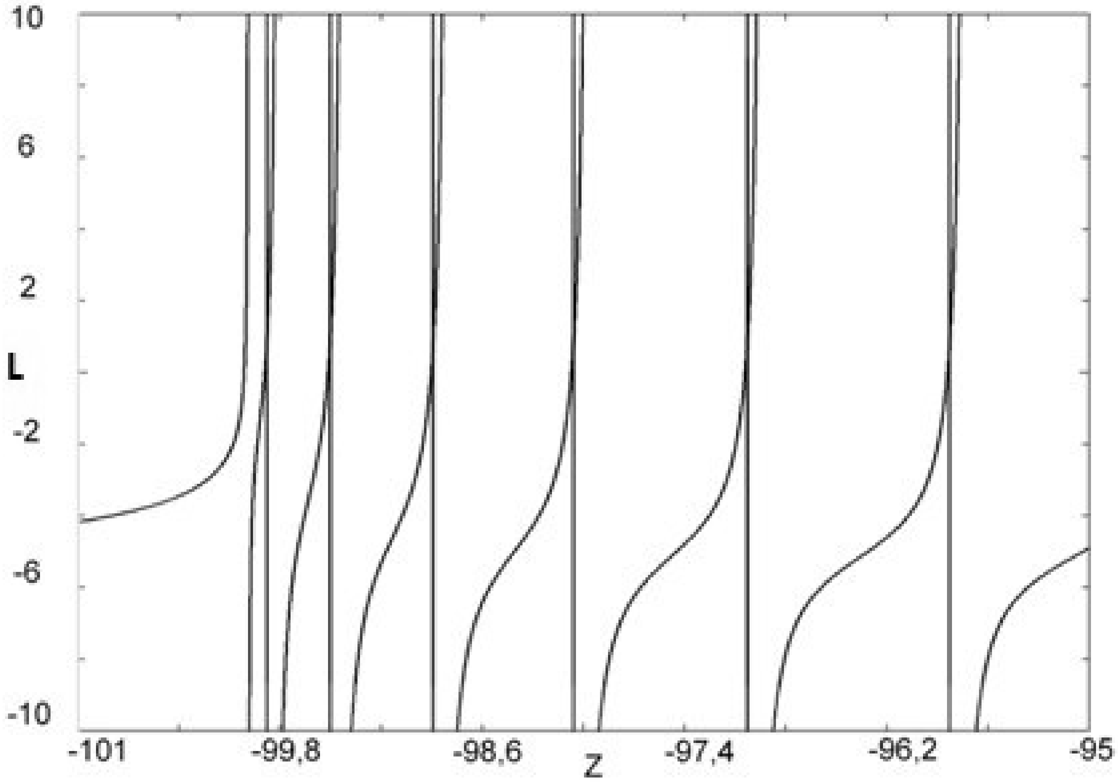


Рис. 2. Энергетические уровни двухчастичной модели с взаимодействием частиц

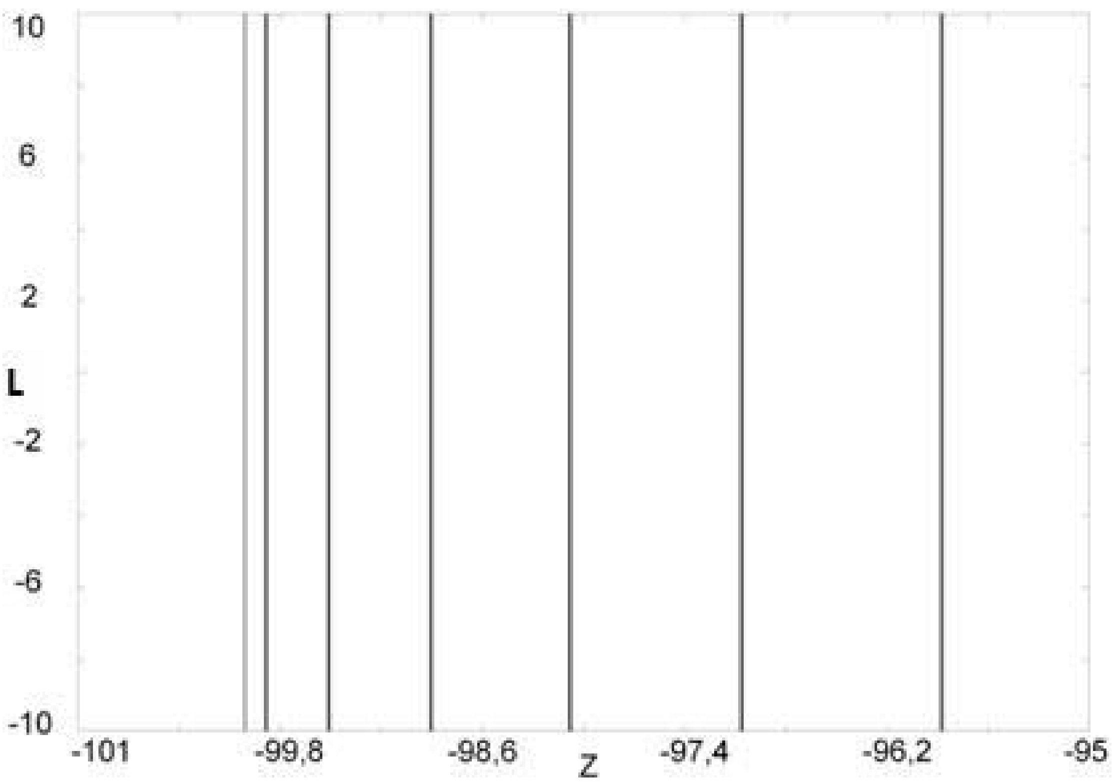


Рис. 3. Энергетические уровни двухчастичной модели без взаимодействия частиц

Из данных графиков видно, что взаимодействие частиц приводит к расслоению энергетических уровней системы.

Работа поддержана в рамках программ «Развитие научного потенциала высшей школы России» (проект 2.1.1/4215), «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракты P689 NK-526P и 14.740.11.0879) и грантом 11-08-00267 РФФИ.

## Литература


[1] Melnikov Yu. B., Pavlov B. S. Two-body scattering on a graph and application to simple nanoelectronic devices // J. Math. Phys., 1995. V. 36. P. 2813–2825.

[2] Harmer M. Two particles on a star graph, I // J. Math. Phys., 2007. V. 14(4). P. 435–439.

[3] Harmer M. Two particles on a star graph, II // J.Math. Phys., 2008. V. 15(4). P. 473–480.

[4] Павлов Б. С. Теория расширений и явнорешаемые модели // УМН, 1987. V. 42(6). P. 99–131.

[5] Exner P. Leaky quantum graphs: a review // Analysis on Graphs and its Applications, 2008. V. 77. P. 523–564.

[6] Kurylev Ya. V. Boundary conditions on curves for the three-dimensional Laplace operator // J. Sov. Math., 1983. V. 22. P. 1072–1082.

[7] Exner P., Ichinose T. Geometrically induced spectrum in curved leaky wires // J. Phys. A: Math. Gen., 2001. V. 34. P. 1439–1450.

[8] Brasche J. F., Exner P., Kuperin Yu. A., Seba P. Schrodinger operators with singular interactions // J. Math. Anal. Appl., 1994. V. 184(1). P. 112–139.

[9] Popov I. Yu. The resonator with narrow slit and the model based on the operator extension theory // J. Math. Phys., 1992. V. 33(11). P. 3794–3801.

[10] Popov I. Yu. The extension theory and the opening in semitransparent surface // J. Math. Phys., 1992. V. 33(5). P. 1585–1589.

[11] Exner P., Kondej S. Bound states due to a strong delta interaction supported by a curved surface // J. Phys. A, 2003. V. 36. P. 443–457.

[12] Teta A. Quadratic forms for singular perturbations of the Laplacian // Res. Inst. Math. Sci., 1990. V. 26(5). P. 803–817.

[13] Лобанов И. С., Лоторейчик В. Ю., Попов И. Ю. Оценка снизу спектра двумерного оператора Шредингера с $\delta$-потенциалом на кривой // ТМФ, 2010. Т. 162(3). С. 397–407.

[14] Ikebe T., Shimada S. Spectral and scattering theory for the Schrodinger operators with penetrable wall potentials // J. Math. Kyoto Univ., 1991. V. 31(1). P. 219–258.

[15] Суслина Т. А., Штеренберг Р. Г. Абсолютная непрерывность спектра оператора Шредингера с потенциалом, сосредоточенным на периодической системе гиперповерхностей // Алгебра и анализ, 2001. Т. 13. С. 197–240.

[16] Posilicano A. A Krein-like formula for singular perturbations of self-adjoint operators and applications // J. Func. Anal., 2001. V. 183. P. 109–147.

[17] Прудников А. П. Интегралы и ряды / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Марычев. — М.: Наука, 1981. — 800 с.