НАНОСИСТЕМЫ: ФИЗИКА, ХИМИЯ, МАТЕМАТИКА, 2012, 3 (4), С. 9–19

УДК 517.968

ГАМИЛЬТОНИАН С ТОЧЕЧНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ И БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

А. А. Бойцев, И. Ю. Попов, О. В. Соколов

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия

popov1955@gmail.com

PACS 02.30.Tb, 42.25.Fx

Построена бесконечная цепочка потенциалов нулевого радиуса, дающая гамильтониан с бесконечным числом собственных значений ниже границы непрерывного спектра. Модель основана на теории самосопряженных расширений симметрических операторов.

Ключевые слова: теория расширения операторов, сингулярные возмущения, точечный спектр.

1. Введение

Вопрос о существовании бесконечного количества различных собственных значений оператора Шредингера возникает в ряде физических задач. В частности, в трехчастичной задаче это явление известно как эффект Ефимова [1], [2], [3], [4], который можно рассматривать как некоторую патологию трехчастичной системы. Другой пример был продемонстрирован Чапликом и Магариллом [5], которые обнаружили интересный факт, что гамильтониан Рашбы, возмиущенный короткодействующими отрицательными потенциалами с вращательной симметрией, имеет бесконечное число собственных значений ниже границы непрерывного спектра. Более общий класс спин-орбитальных гамильтонианов с подобным свойством, включающий в себя и предыдущий, был построен и строго математически исследован в [6]. Авторы использовали минимаксимальный признак в духе работы [7]. В настоящей статье мы строим другой пример оператора Шредингера, имеющий бесконечно много различных собственных значений ниже границы непрерывного спектра. А именно, мы строим специальным образом выбранную бесконечную цепочку потенциалов нулевого радиуса, дающую нам оператор Шредингера с требуемым свойством. Благодаря явной решаемости модели точечных потенциалов спектральное уравнение для оператора выписывается явно, что существенно упрощает спектральный анализ. Точечное взаимодействие вводится обычным образом [8], [9] на базе теории самосопряженных расширений симметрических операторов (этот подход восходит к классической работе Березина и Фаддеева [10]. Данный метод широко используется для описания различных квантовых и классических систем (см., например, [11], [12], [13]).

Опишем кратко конструкцию модели. Схема введения потенциала нулевого радиуса (в $\mathbb{R}^3$) такова. Исходным является самосопряженный оператор Лапласа в $L_2(\mathbb{R}^3)$. Сначала данный оператор сужается на множество гладких функций, обращающихся в нуль в точке x_0. Полученный оператор является лишь симметрическим, но не самосопряженным. Его индексы дефекта $(1, 1)$. Он имеет самосопряженные расширения, которые являются сужениями сопряженного оператора к данному симметричному. Для построения самосопряженного расширения удобно не расширять непосредственно исходный оператор, а сужать сопряженный. Элементы из области определения сопряженного оператора имеют вид

$$\psi(x) = \psi_0(x) + b + a\frac{1}{4\pi\,|x - x_0|}.$$

Здесь ψ_0 — элемент из области определения исходного симметрического оператора ($\psi_0(x_0) = 0$). Построение искомого самосопряженного расширения сводится к сужению данной области определения на множество функций, у которых коэффициенты a и b линейно связаны (пропорциональны).

Опишем теперь более подробно модель цепочки из n потенциалов нулевого радиуса в $\mathbb{R}^3$ в точках x_m. Сначала сужаем оператор Лапласа на множество гладких функций, зануляющихся в точках x_m. Получаем симметрический оператор с индексами дефекта (n, n). Элемент из области определения сопряженного оператора имеет вид ([14]):

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \sum_{m=1}^{n} \tilde{a}_m \cdot \frac{e^{-ik_0|x-x_m|}}{4\pi\,|x - x_m|}, \tag{1}$$

где ψ_0 принадлежит области определения расширения по Фридрихсу исходного симметрического оператора, $\tilde{a}_m$ — некоторые константы, $k_0 = \sqrt{\lambda_0}$, λ_0 — регулярное значение спектрального параметра (мы выбираем вещественное отрицательное значение λ_0, $\Im k_0 > 0$). Пусть $\psi_0(x_m) = b_m, m = 1, 2...n$. Для нашей цели не требуется описывать все возможные самосопряженные расширения. Мы выберем только одно, определяемое следующим соотношением между $n-$векторами:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

Здесь матрица, параметризующая расширение, выбрана в диагональной форме, $\alpha_j, j = 1, ...n,$ — некоторые вещественные параметры, физический смысл которых — интенсивности соответствующих потенциалов.

Основной результат данной статьи приведен в следующей теореме.

Теорема. Оператор Лапласа в $L_2(\mathbb{R}^3)$, возмущенный цепочкой потенциалов нулевого радиуса в точках $(0, 0, 0), ...(x_m, 0, 0), ...,$

$$x_1 = (0, 0, 0) \qquad x_m = x_{m-1} + (m^m \cdot 2^{2m^2}, 0, 0), m = 2, 3, ...,$$

с интенсивностями, соответственно, α_m,

$$\alpha_m = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4\pi} - \frac{ik_0}{4\pi},$$

имеет бесконечное число собственных значений ниже границы непрерывного спектра.

2. Доказательство теоремы

Наша цель — построить бесконечную цепочку, приводящую к наличию бесконечного набора собственных значений. Для этого мы рассмотрим предельный переход ($n \to \infty$) и осуществим специальный выбор положений потенциалов x_m и их интенсивностей α_m. Будем строить цепочку, последовательно добавляя новые центры и следя за положениями «старых» и появляющихся «новых» собственных значений (добавление нового потенциала приводит к появлению нового собственного значения и сдвигу старых). Положения и интенсивности добавляемых потенциалов выбираем так, чтобы избежать «склеивания» собственных значений. Требуемый гамильтониан с бесконечной цепочкой потенциалов получается как сильный резольвентный предел построенной последовательности операторов. Доказательство теоремы естественным образом распадается на несколько частей.

Часть 1

Выберем следующие положения центров:

$$x_1 = (0,0,0) \qquad x_m = x_{m-1} + (m^m \cdot 2^{2m^2}, 0, 0), m = 2, 3, ...,$$

В соответствии с описанием области определения оператора, данной выше, ищем собственную функцию, отвечающую собственному значению λ в виде:

$$\sum_{m=1}^{n} a_m \cdot \frac{e^{-ik|x-x_m|}}{4\pi\,|x-x_m|}, \tag{3}$$

$k = \sqrt{\lambda}$. Определим параметры $\tilde{a}_m, b_m$ из определения (1). Благодаря тому, что сингулярности у $\dfrac{e^{-ik|x-x_m|}}{4\pi\,|x-x_m|}$ и $\dfrac{e^{-ik_0|x-x_m|}}{4\pi\,|x-x_m|}$ одинаковы, находим $\tilde{a}_m = a_m$. Для получения коэффициента b_m следует вычесть сингулярный член $\dfrac{e^{-ik_0|x-x_m|}}{4\pi\,|x-x_m|}$. Выражение для b_m получается таким:

$$\begin{cases} b_1 = a_1\dfrac{i(k-k_0)+1}{4\pi} + a_2\dfrac{e^{-ik|x_1-x_2|}}{4\pi\,|x_1-x_2|} + a_3\dfrac{e^{-ik|x_1-x_3|}}{4\pi\,|x_1-x_3|} + \ldots + a_n\dfrac{e^{-ik|x_1-x_n|}}{4\pi\,|x_1-x_n|} \\ b_2 = a_1\dfrac{e^{-ik|x_1-x_2|}}{4\pi\,|x_1-x_2|} + a_2\dfrac{i(k-k_0)+1}{4\pi} + a_3\dfrac{e^{-ik|x_2-x_3|}}{4\pi\,|x_2-x_3|} + \ldots + a_n\dfrac{e^{-ik|x_2-x_n|}}{4\pi\,|x_2-x_n|} \\ b_3 = a_1\dfrac{e^{-ik|x_1-x_3|}}{4\pi\,|x_1-x_3|} + a_2\dfrac{e^{-ik|x_2-x_3|}}{4\pi\,|x_2-x_3|} + a_3\dfrac{i(k-k_0)+1}{4\pi} + \ldots + a_n\dfrac{e^{-ik|x_3-x_n|}}{4\pi\,|x_3-x_n|} \\ \vdots \\ b_n = a_1\dfrac{e^{-ik|x_1-x_n|}}{4\pi\,|x_1-x_n|} + a_2\dfrac{e^{-ik|x_2-x_n|}}{4\pi\,|x_2-x_n|} + a_3\dfrac{e^{-ik|x_3-x_n|}}{4\pi\,|x_3-x_n|} + \ldots + a_n\dfrac{i(k-k_0)+1}{4\pi} \end{cases} \tag{4}$$

Введем обозначения

$$t = \frac{ik}{4\pi} \qquad t \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{5}$$

$$\Delta e_{i,j} = \frac{e^{-4\pi t|x_i-x_j|}}{4\pi\,|x_i-x_j|}. \tag{6}$$

учитывая (5), (6) приводим систему (4) к форме

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+\frac{1}{4\pi} & \Delta e_{1,2} & \Delta e_{1,3} & \ldots & \Delta e_{1,n} \\ \Delta e_{1,2} & t+\frac{1}{4\pi} & \Delta e_{2,3} & \ldots & \Delta e_{2,n} \\ \Delta e_{1,3} & \Delta e_{2,3} & t+\frac{1}{4\pi} & \ldots & \Delta e_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta e_{1,n} & \Delta e_{2,n} & \Delta e_{3,n} & \ldots & t+\frac{1}{4\pi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

В соответствии с выбором расширения (2) имеем

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Выберем параметры расширений (интенсивности потенциалов α_j) специальным образом

$$\alpha_j = \frac{1}{2^j} + \frac{1}{4\pi} - \frac{ik_0}{4\pi}$$

Вычитая (8) из (7), получаем

$$\begin{pmatrix} t-\beta_1 & \Delta e_{1,2} & \Delta e_{1,3} & \dots & \Delta e_{1,n} \\ \Delta e_{1,2} & t-\beta_2 & \Delta e_{2,3} & \dots & \Delta e_{2,n} \\ \Delta e_{1,3} & \Delta e_{2,3} & t-\beta_3 & \dots & \Delta e_{3,n} \\ \dots \\ \Delta e_{1,n} & \Delta e_{2,n} & \Delta e_{3,n} & \dots & t-\beta_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = 0, \tag{9}$$

где $\beta_j = \dfrac{1}{2^j}$.

Эта система уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} t-\beta_1 & \Delta e_{1,2} & \Delta e_{1,3} & \dots & \Delta e_{1,n} \\ \Delta e_{1,2} & t-\beta_2 & \Delta e_{2,3} & \dots & \Delta e_{2,n} \\ \Delta e_{1,3} & \Delta e_{2,3} & t-\beta_3 & \dots & \Delta e_{3,n} \\ \dots \\ \Delta e_{1,n} & \Delta e_{2,n} & \Delta e_{3,n} & \dots & t-\beta_n \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

Это уравнение (10) имеет не более, чем n корней.

Часть 2

Далее будем предполагать, что $t \in (0;1)$. Введем обозначение

$$\widetilde{f}_n(t) = \begin{vmatrix} t-\beta_1 & \Delta e_{1,2} & \Delta e_{1,3} & \dots & \Delta e_{1,n} \\ \Delta e_{1,2} & t-\beta_2 & \Delta e_{2,3} & \dots & \Delta e_{2,n} \\ \Delta e_{1,3} & \Delta e_{2,3} & t-\beta_3 & \dots & \Delta e_{3,n} \\ \dots \\ \Delta e_{1,n} & \Delta e_{2,n} & \Delta e_{3,n} & \dots & t-\beta_n \end{vmatrix} \tag{11}$$

Раскладывая определитель по последнему столбцу, получаем

$$\widetilde{f}_n(t) = \widetilde{f}_{n-1}(t) \cdot (t-\beta_n) + \epsilon_n(t) \tag{12}$$

где

$$\epsilon_n(t) = (-1)^{n+1} \cdot \left(\Delta e_{1,n} \begin{vmatrix} \Delta e_{1,2} & t-\beta_2 & \Delta e_{2,3} & \dots & \Delta e_{2,n-1} \\ \Delta e_{1,3} & \Delta e_{2,3} & t-\beta_3 & \dots & \Delta e_{3,n-1} \\ \dots \\ \Delta e_{1,n} & \Delta e_{2,n} & \Delta e_{3,n} & \dots & \Delta e_{n-1,n} \end{vmatrix} - \right.$$

$$- \Delta e_{2,n} \begin{vmatrix} t-\beta_1 & \Delta e_{1,2} & \Delta e_{1,3} & \dots & \Delta e_{1,n-1} \\ \Delta e_{1,3} & \Delta e_{2,3} & t-\beta_3 & \dots & \Delta e_{3,n-1} \\ \dots \\ \Delta e_{1,n} & \Delta e_{2,n} & \Delta e_{3,n} & \dots & \Delta e_{n-1,n} \end{vmatrix} +$$

$$\left. + \dots \pm \Delta e_{n-1,n} \begin{vmatrix} t-\beta_1 & \Delta e_{1,2} & \Delta e_{1,3} & \dots & \Delta e_{1,n-1} \\ \Delta e_{1,2} & t-\beta_2 & \Delta e_{2,3} & \dots & \Delta e_{2,n-1} \\ \Delta e_{1,3} & \Delta e_{2,3} & t-\beta_3 & \dots & \Delta e_{3,n-1} \\ \dots \\ \Delta e_{1,n} & \Delta e_{2,n} & \Delta e_{3,n} & \dots & \Delta e_{n-1,n} \end{vmatrix} \right) \quad (13)$$

Из (6) следует, что если $|x_i - x_j| \geqslant |x_k - x_l|$, то $\Delta e_{i,j} \leqslant \Delta e_{k,l}$. Следовательно,

$$\Delta e_{k,n} \leqslant \Delta e_{n-1,n}, \qquad k = 1, ...n-1 \quad (14)$$

$$\Delta e_{i,j} \leqslant \Delta e_{1,2} \leqslant 1 \quad (15)$$

для всех $i, j, \qquad i \neq j$

Напомним, что мы рассматриваем $0 < t < 1$. Более того, известно, что $\beta_k > 0$, тогда

$$t - \beta_k \leqslant 1 \qquad k = 1..n-1 \quad (16)$$

В соответствии с неравенством Адамара абсолютная величина определителя оценивается сверху произведением длин соответствующих векторов:

$$|\epsilon_n(t)| \leqslant \Delta e_{n-1,n} \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \sqrt{\underbrace{1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}_{n-1}} = \Delta e_{n-1,n}(n-1)(n-1)^{\frac{n-1}{2}} \leqslant \Delta e_{n-1,n} \cdot n^n \quad (17)$$

Учитывая (14), (15) и (16), получаем

$$\Delta e_{n,n-1} = \frac{e^{-ik|x_n - x_{n-1}|}}{4\pi\, |x_n - x_{n-1}|} < \frac{1}{|x_n - x_{n-1}|} = \frac{1}{n^n \cdot 2^{2n^2}}. \quad (18)$$

Значит, приходим к следующей оценке

$$|\epsilon_n(t)| < \frac{1}{2^{2n^2}}. \quad (19)$$

Пусть

$$d(n) = \frac{1}{2^{2n^2}} \quad (20)$$

Замечание. Если $\widetilde{f}_n(t)$ имеет n корней в случае, когда $\epsilon_n(t) = d(n)$, то он имеет n корней, когда $|\epsilon_n(t)| < d(n)$.

Часть 3

Рассмотрим случай, когда $\epsilon_n(t) = d(n)$. Можно видеть, что

$$\widetilde{f}_1(t) = t - \frac{1}{2},$$

$$\widetilde{f}_n(t) = \widetilde{f}_{n-1}(t) \cdot \left(t - \frac{1}{2^n}\right) + d(n),$$

Следовательно,

$$\widetilde{f}_n(t) = \left(\ldots\left(\left(\left(t - \tfrac{1}{2}\right)\left(t - \tfrac{1}{2^2}\right) + d(2)\right)\left(t - \tfrac{1}{2^3}\right) + d(3)\right)\right.$$
$$\left.\left(t - \tfrac{1}{2^4}\right) + \ldots\right)\left(t - \tfrac{1}{2^n}\right) + d(n).$$

Простые преобразования дают

$$\widetilde{f}_n(t) = \prod_{k=1}^{n}\left(t - \frac{1}{2^k}\right) + \sum_{i=2}^{n-1} d(i) \cdot \prod_{k=i+1}^{n}\left(t - \frac{1}{2^k}\right) + d(n). \tag{21}$$

Введем обозначение

$$f_n(t) = \prod_{k=1}^{n}\left(t - \frac{1}{2^k}\right), \tag{22}$$

$$D_n(t) = \sum_{i=2}^{n-1} d(i) \cdot \prod_{k=i+1}^{n}\left(t - \frac{1}{2^k}\right) + d(n), \tag{23}$$

соответственно,

$$\widetilde{f}_n(t) = f_n(t) + D_n(t). \tag{24}$$

Функция $f_n(t)$ имеет n корней на $(0;1)$. Покажем, что $\widetilde{f}_n(t)$ также имеет n корней на этом интервале.

Чтобы сделать это, докажем, что для любого интервала вида $\left(\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^{m-1}}\right)$ существует $t \in \left(\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^{m-1}}\right)$ такое, что $f_n(t) \cdot \widetilde{f}_n(t) > 0$. Здесь $m = 2, 3, \ldots n$.

Часть 3.1

Рассмотрим интервалы, на которых $f_n(t) > 0$. Они таковы $\left(\frac{1}{2^{2m+1}}; \frac{1}{2^{2m}}\right)$, $m = 1, \ldots [n/2] - 1$. Покажем, что $\widetilde{f}_n(t) > 0$ на этих интервалах. Фиксируем m, тогда имеем $t \in \left(\frac{1}{2^{2m+1}}; \frac{1}{2^{2m}}\right)$. Для всех $k > 2m$ имеем

$$\left(t - \frac{1}{2^k}\right) > 0.$$

Следовательно, для для последнего члена в (23) имеем

$$\sum_{i=2m}^{n-1} d(i) \cdot \prod_{k=i+1}^{n}\left(t - \frac{1}{2^k}\right) + d(n) > 0 \tag{25}$$

Теперь рассмотрим начало суммы (23) (то есть слагаемые с номерами от $i = 2$ до $i = 2m - 1$). Объединим их в пары.

$$s_k(t) = d(2k)\left(t - \frac{1}{2^{2k+1}}\right)\ldots\left(t - \frac{1}{2^{2m}}\right)\left(t - \frac{1}{2^{2m+1}}\right)\ldots\left(t - \frac{1}{2^n}\right) +$$
$$+ d(2k+1)\left(t - \frac{1}{2^{2k+2}}\right)\ldots\left(t - \frac{1}{2^{2m}}\right)\left(t - \frac{1}{2^{2m+1}}\right)\ldots\left(t - \frac{1}{2^n}\right) \tag{26}$$

Поменяем знаки отрицательных множителей

$$s_k(t) = d(2k)\left(\frac{1}{2^{2k+1}} - t\right)\dots\left(\frac{1}{2^{2m}} - t\right)\left(t - \frac{1}{2^{2m+1}}\right)\dots\left(t - \frac{1}{2^n}\right) -$$

$$- d(2k+1)\left(\frac{1}{2^{2k+2}} - t\right)\dots\left(\frac{1}{2^{2m}} - t\right)\left(t - \frac{1}{2^{2m+1}}\right)\dots\left(t - \frac{1}{2^n}\right) \quad (27)$$

Теперь поделим оба слагаемых на их общую (положительную) часть и обозначим результат как $s'_k(t)$. Он имеет тот же знак, что и $s_k(t)$.

$$s'_k(t) = d(2k)\left(\frac{1}{2^{2k+1}} - t\right) - d(2k+1) \quad (28)$$

Имеем $k < m$, поэтому $k+1 \leqslant m$ и $\frac{1}{2^{2m}} \leqslant \frac{1}{2^{2(k+1)}}$, значит, $t < \frac{1}{2^{2m}}$ в этом интервале. Благодаря неравенству

$$t < \frac{1}{2^{2(k+1)}}$$

имеем

$$\frac{1}{2^{2k+1}} - t > \frac{1}{2^{2k+1}} - \frac{1}{2^{2(k+1)}} \quad (29)$$

и, соответственно,

$$s'_k(t) > d(2k)\frac{1}{2^{2k+2}} - d(2k+1) = \frac{1}{2^{8k^2+2k+2}} - \frac{1}{2^{8k^2+8k+2}} > 0. \quad (30)$$

для всех $k \geqslant 1$. Это дает $s_k(t) > 0$ и, следовательно, $D_n(t) > 0$. Таким образом, приходим к неравенству $\widetilde{f}_n(t) > 0$.

Часть 3.2

Рассмотрим интервалы, где $f_n(t) < 0$. Они таковы $\left(\frac{1}{2^{2m}}; \frac{1}{2^{2m-1}}\right)$, $m = 1..\lfloor n/2 \rfloor$ Фиксируем m, тогда имеем $t \in \left(\frac{1}{2^{2m}}; \frac{1}{2^{2m-1}}\right)$. Пусть $t_0 = \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{2^{2m+1}}$ — середины интервалов. Покажем, что $\widetilde{f}_n(t_0) < 0$ тем же путем, что и в предыдущей части (с естественными модификациями). Действительно,

$$\widetilde{f}_n(t_0) = f_n(t_0) + \sum_{i=2}^{2m-1} d(i) \cdot \prod_{k=i+1}^{n}\left(t_0 - \frac{1}{2^k}\right) +$$

$$\sum_{i=2m}^{n-1} d(i) \cdot \prod_{k=i+1}^{n}\left(t_0 - \frac{1}{2^k}\right) + d(n) \quad (31)$$

Объединим члены первой суммы в пары. Рассмотрим произвольную пару $s_k(t_0)$.

$$s_k(t_0) = d(2k)\left(t_0 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right)\dots\left(t_0 - \frac{1}{2^{2m-1}}\right)\left(t_0 - \frac{1}{2^{2m}}\right)\dots\left(t_0 - \frac{1}{2^n}\right) +$$

$$+ d(2k+1)\left(t_0 - \frac{1}{2^{2k+2}}\right)\dots\left(t_0 - \frac{1}{2^{2m-1}}\right)\left(t_0 - \frac{1}{2^{2m}}\right)\dots\left(t_0 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (32)$$

Поменяем знаки отрицательных множителей:

$$s_k(t_0) = -d(2k)\left(\frac{1}{2^{2k+1}} - t_0\right)\dots\left(\frac{1}{2^{2m-1}} - t_0\right)\left(t_0 - \frac{1}{2^{2m}}\right)\dots\left(t_0 - \frac{1}{2^n}\right) +$$
$$+ d(2k+1)\left(\frac{1}{2^{2k+2}} - t_0\right)\dots\left(\frac{1}{2^{2m-1}} - t_0\right)\left(t_0 - \frac{1}{2^{2m}}\right)\dots\left(t_0 - \frac{1}{2^n}\right) \quad (33)$$

Теперь поделим оба слагаемых на их общие (положительные) части, обозначим результат как $s'_k(t_0)$. Он имеет тот же знак, что и $s_k(t_0)$.

$$s'_k(t_0) = -d(2k)\left(\frac{1}{2^{2k+1}} - t_0\right) + d(2k+1) \quad (34)$$

Оценим $\frac{1}{2^{2k+1}} - t_0$ для $k < m$.

a) $k < m - 1$.

В этом случае $2m - 1 \geqslant 2k + 2$ и $\frac{1}{2^{2m-1}} \leqslant \frac{1}{2^{2k+2}}$, то есть $t_0 < \frac{1}{2^{2k+2}}$. Таким образом, $\frac{1}{2^{2k+1}} - t_0 > \frac{1}{2^{2k+2}}$

b) $k = m - 1$.

В этом случае, очевидно,

$$\frac{1}{2^{2k+1}} - t_0 = \frac{1}{2^{2m-1}} - \frac{1}{2^{2m}} - \frac{1}{2^{2m+1}} = \frac{1}{2^{2m+1}} = \frac{1}{2^{2k+3}}.$$

Комбинируя a) и b), получаем

$$\frac{1}{2^{2k+1}} - t_0 \geqslant \frac{1}{2^{2k+3}}. \quad (35)$$

Следовательно,

$$s'_k(t_0) \leqslant -d(2k)\frac{1}{2^{2k+3}} + d(2k+1) = -\frac{1}{2^{8k^2+2k+3}} + \frac{1}{2^{8k^2+8k+1}} = \frac{-2^{6k} + 2^2}{2^{8k^2+8k+3}} \leqslant 0.$$

Значит,

$$s_k(t_0) \leqslant 0 \quad (36)$$

Заметим, что

$$\widetilde{f}_n(t_0) \leqslant f_n(t_0) + \sum_{i=2m}^{n-1} d(i) \cdot \prod_{k=i+1}^{n}\left(t_0 - \frac{1}{2^k}\right) + d(n) \quad (37)$$

Рассмотрим сумму и покажем, что ее слагаемые убывают быстрее геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/2$. Действительно,

$$\frac{d(i) \cdot \prod\limits_{k=i+1}^{n}\left(t_0 - \frac{1}{2^k}\right)}{d(i+1) \cdot \prod\limits_{k=i+2}^{n}\left(t_0 - \frac{1}{2^k}\right)} = \frac{d(i)}{d(i+1)} \cdot \left(t_0 - \frac{1}{2^{i+1}}\right)$$
$$\geqslant \frac{1}{2^{2i^2}} : \frac{1}{2^{2(i+1)^2}} \cdot \left(t_0 - \frac{1}{2^{2m+1}}\right) =$$
$$= 2^{4i+2} \cdot \frac{1}{2^{2m}} = 2^{4i-2m+2} > 2 \qquad \text{так как} \qquad i \geqslant 2m. \quad (38)$$

Значит,

$$\widetilde{f}_n(t_0) < f_n(t_0) + 2d(2m) \prod_{k=2m+1}^{n} \left(t_0 - \frac{1}{2^k}\right) \tag{39}$$

Обозначим правую часть как $r_m(t_0)$:

$$r_m(t_0) = \prod_{k=1}^{n} \left(t_0 - \frac{1}{2^k}\right) + 2d(2m) \prod_{k=2m+1}^{n} \left(t_0 - \frac{1}{2^k}\right) \tag{40}$$

Поделим оба слагаемых на их общую положительную часть и обозначим результат как $r'_m(t_0)$. Он имеет тот же знак, что и $r_m(t_0)$.

$$r'_m(t_0) = \left(t_0 - \frac{1}{2}\right) \dots \left(t_0 - \frac{1}{2^{2m-1}}\right) \left(t_0 - \frac{1}{2^{2m}}\right) + 2d(2m)$$

Поменяем знаки отрицательных множителей

$$r'_m(t_0) = -\left(\frac{1}{2} - t_0\right) \dots \left(\frac{1}{2^{2m-1}} - t_0\right) \left(t_0 - \frac{1}{2^{2m}}\right) + 2d(2m). \tag{41}$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} -r'_m(t_0) &> \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \dots \frac{1}{2^{2m-1}} \cdot \frac{1}{2^{2m+1}} \cdot \frac{1}{2^{2m+1}} - 2d(2m) > \\ &> \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{2+3+4+\ldots+m+(m+1)}} - 2d(2m) = \frac{1}{2^{(2m+2)(2m+1)/2+1}} - \frac{2}{2^{8m^2}} > \\ &> \frac{1}{2^{2m^2+3m+2}} - \frac{1}{2^{8m^2-1}} = \frac{2^{6m^2} - 2^{3m+3}}{2^{8m^2+3m+2}} \geqslant 0 \\ &\text{так как } 6m^2 - 3m - 3 \geqslant 0, \qquad \text{для всех} \qquad m \geqslant 1 \end{aligned} \tag{42}$$

Значит, $r'_m(t_) < 0$ и $r_m(t_0) < 0$. Таким образом, $\widetilde{f}_n(t_0) < 0$.

Часть 4

Мы уже доказали, что всякий интервал вида $\left(\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^{m-1}}\right)$ содержит точки, в которых $f_n(t) \cdot \widetilde{f}_n(t) > 0$, где $m = 2, 3, \ldots n$. Используем простую хорошо известную лемму

Лемма 1. Пусть $f \in C([a, b])$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = 0$.

Рассмотрим два случая: n нечетно и n четно.

а) Случай четного n.

Пусть $\{t_k\}_{k=2}^n$ — последовательность точек из интервалов $\left(\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^{m-1}}\right)$ (каждый интервал содержит только одну точку последовательности) таких, что $f_n(t_k) \cdot \widetilde{f}_n(t_k) > 0$. Тогда, согласно лемме 1, $\widetilde{f}_n(t)$ имеет по крайней мере один корень в каждом интервале (t_k, t_{k-1}). Поэтому имеется по крайней мере $(n-2)$ корней в интервале $\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2}\right)$ (действительно, имеем $(n-2)$ интервала (t_n, t_{n-1}), (t_{n-1}, t_{n-2}),... (t_3, t_2)).

Более того, можно заметить, что $\lim\limits_{t \to -\infty} f_n(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} \widetilde{f}_n(t) = +\infty$. Учитывая, что $\frac{1}{2^n}$ есть наименьший корень $f_n(t)$, ясно, что $\widetilde{f}_n(t_n) < 0$. Поэтому, согласно лемме 1, имеем еще один корень r_1, $r_1 < t_n$. Аналогично, $\lim\limits_{t \to +\infty} f_n(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \widetilde{f}_n(t) = +\infty$. Как и в предыдущем случае имеем $\widetilde{f}_n(t_2) < 0$, и, следовательно, есть еще один корень r_2, $r_2 > t_2$. Итак, мы доказали, что $\widetilde{f}_n$ имеет по крайней мере n различных корней. Так как $\deg(\widetilde{f}_n(t)) = n$, корней ровно n.

b) Случай нечетного n.

По тем же причинам, что и в предыдущем случае, имеем по крайней мере $(n-2)$ корня, принадлежащих интервалу $\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2}\right)$ и один корень r_2, $r_2 > t_2$. Так как $\frac{1}{2^n}$ есть минимальный корень $f_n(t)$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} f_n(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} \widetilde{f}_n(t) = -\infty$, ясно, что $\widetilde{f}_n(t_n) > 0$. Поэтому по лемме 1 есть корень r_1, $r_1 < t_n$. Таким образом, есть точно n различных корней.

Объединяя оба случая, получаем, что $\widetilde{f}_n(t)$ имеет n различных корней, то есть соответствующий гамильтониан имеет n различных собственных значения.

Часть 5

Как результат, приходим к выводу, что построенный гамильтониан (с n потенциалами нулевого радиуса) имеет n различных собственных значения ниже границы непрерывного спектра для любого фиксированного n, и предельный переход $(n \to \infty)$ не приводит к «склеиванию» собственных значений (благодаря тому, что они находятся в непересекающихся интервалах). Требуемый гамильтониан получается как сильный резольвентный предел этой последовательности операторов. А именно, пусть

$$X = \{x_j \in \mathbb{R}^3, j \in \mathbb{N}\}, X_n = \{x_j \in \mathbb{R}^3, j \in \mathbb{N}, j \leqslant n\},$$

$$\alpha : X \to \mathbb{R}.$$

Пусть $-\Delta_{X,\alpha}$, $-\Delta_{X_n,\alpha}$, — операторы Лапласа с потенциалами в точках из X (соответственно, X_n) с интенсивностями (параметрами расширения α_j, см. (2)) определенными α (см. выше). Обозначим соответствующую резольвенту через $R(\lambda)$ $(R_n(\lambda))$.

Лемма 2. Резольвента $R(\lambda)$ есть сильный предел последовательности операторов $R_n(\lambda)$:

$$R(\lambda) = s - \lim_{n\to\infty} R_n(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из теоремы 3.1.1.1 [8] благодаря тому, что в нашем случае (при нашем выборе X и α)

$$\inf_{j\neq j', \quad j,j'\in\mathbb{N}} |x_j - x_{j'}| = d > 0$$

и α ограничена.

Следовательно, гамильтониан с построенной бесконечной цепочкой имеет бесконечное число различных собственных значений.

Таким образом, теорема доказана.

Можно заметить, что доказательство дает больше информации о собственных значениях. Пусть они пронумерованы в порядке возрастания. Тогда имеет место следующее утверждение.

Следствие. Собственные значения построенного гамильтониана с бесконечной цепочкой потенциалов нулевого радиуса имеет следующую асимптотику (по номеру собственного значения):

$$\lambda_m \approx -\frac{16\pi^2}{2^{2m}}. \tag{43}$$

Доказательство. Уже доказано, что собственное значение с фиксированным номером локализовано в фиксированном интервале, и различные интервалы из этого множества не пересекаются. Следовательно, получаем асимптотику собственного значения по номеру.

А именно, получаем, что $t_m \approx \frac{1}{2^m}$. Благодаря соотношениям $t_m = \frac{i \cdot k_m}{4\pi}$ и $k_m = \sqrt{\lambda_m}$, λ_m — m-е собственное значение, получаем асимптотику, о которой идет речь.

Работа частично поддержана ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракты P689 NK-526P, 14.740.11.0879 и 16.740.11.0030, грант 2012-1.2.2-12-000-1001-047), грантом 11-08-00267 РФФИ, ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научного и технологического комплекса России 2007-2013» (контракт 07.514.11.4146).

Литература

[1] V.N.Efimov. Bound states of three resonances of interacting particles // Nuclear Phys. — 1970. — V.12, №5. — P. 1080–1091.

[2] Яфаев Д.Р. О теории дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера // Матем. сб. — 1974. — Т.94, №4. — С. 567-593.

[3] Tamura H. The Efimov effect of three-body Schrodinger operators. // J. Funct. Anal. — 1991. — V.95, №2. — P. 433–459.

[4] Эшкабилов Ю. Х. О бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрихса // Математические труды. — 2011. — Т.14, №1. — С.195–211.

[5] A.V.Chaplik, L.I.Magarill. Bound states in a two-dimensional short range potential induced by spin-orbit interaction // Phys. Rev. Lett. — 2006. — V.96. — 126402.

[6] J. Bruning, V.Geyler, K.Pankrashkin. On the number of bound states for weak perturbations of spin–orbit Hamiltonians // J. Phys. A: Math. Theor. — 2007. — V.40. — P. F113–F117.

[7] K.Yang, M.de Llano. Simple variational proof that any two-dimensional potential well supports at least one bound state // Am. J. Phys. — 1989. — V.57. — P.85-86.

[8] S.Albeverio, F.Gesztesy, R.Hoegh-Krohn. and H.Holden with an appendix by P.Exner. Solvable Models in Quantum Mechanics:Second Edition. — AMS Chelsea Publishing, Providence, R.I., 2005.

[9] Павлов Б.С. Теория расширений и явнорешаемые модели // УМН. — 1987. — Т.42, №6. — Р.99-131.

[10] Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. — 1961. — Т.137, № 5. — С. 1011-1014.

[11] Martin G., Yafyasov A.M., Pavlov B.S. Resonance one-body scattering on a junction. // Наносистемы: физ., хим., мат. — 2010. — V.1, №1. — P. 108–147.

[12] Еремин Д.А., Попов И.Ю. Квантовое кольцо с проводником: модель двухчастичной задачи // Наносистемы: физ., хим., мат. — 2011. — Т.2, №2. — Р. 15-31.

[13] Попов И.Ю. Теория расширений и локализация резонансов для областей ловушечного типа // Матем. сборник. — 1991. — Т.181, №10. — С. 1366-1390.

[14] Бирман М.С., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — СПб.:Лань, 2010.