НАНОСИСТЕМЫ: ФИЗИКА, ХИМИЯ, МАТЕМАТИКА, 2012, 3 (6), С. 47–63

УДК 517.938, 519.21, 536.12

О СТОХАСТИЧЕСКОМ ОБОСНОВАНИИ ОПИСАНИЯ КИНЕТИКИ НАНОЧАСТИЦ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. М. Башаров[1,2]

[1]Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, Россия

[2]Московский физико-технический институт
(государственный университет), г. Долгопрудный, Россия

basharov@gmail.com

Дан обзор основных представлений о дробном анализе и типичных общих случаях кинетики сосредоточенных открытых систем, приводящих к использованию уравнений с дробными производными.

Ключевые слова: открытые системы, процессы переноса и релаксации, субординированные процессы и процессы Леви, стохастические дифференциальные уравнения.

1. Введение

Одним из основных методов познания мира является исследование отклика системы на малые (и не малые) возмущения, в частности, изучение процессов возврата системы к равновесному или к квазиравновесному состоянию после ее выведения из этого или другого такого состояния. Такие процессы известны как релаксационные и многие задачи спектроскопии, нелинейной и квантовой оптики затрагивают вопросы релаксации разного рода возбуждений в атомных, фотонных и фононных и прочих системах.

До сих пор основной и самой распространенной моделью релаксации является экспоненциальная релаксация, описываемая простейшим дифференциальным уравнением (релаксационным уравнением) вида

$$\frac{d}{dt}p(t) = -\gamma p(t) \tag{1}$$

с решением

$$p(t) = p(0)e^{-\gamma t}. \tag{2}$$

Экспоненциальное затухание во времени (2) какого-либо параметра системы типично для многих задач, в некоторых из них (поляризация диэлектриков и т.п.) такое затухание известно как описываемое моделью Дебая. В оптике так затухает недиагональная матрица плотности одиночного возбужденного атома. Однако простой закон (1)— (2) не подходит для многих реальных случаев из различных областей физических и других наук, так что исследования неэкспоненциальной релаксации начались давно. Еще в XIX столетии в 1847 г. Кольрауш установил [1], что временное затухание электрического заряда $p(t)$ в лейденской банке подчиняется закону

$$p(t) \sim \exp[-(t/\tau)^{\beta}] \tag{3}$$

с параметром $\beta = 0{,}426$.

В настоящее время число публикаций по неэкспоненциальной релаксации весьма велико и охватывает весьма далекие друг от друга разделы физики, а также других наук. Причем, такие процессы характеризуют как протяженные среды, например, вязкоупругие

[2] и другие материалы [3,4], так и локализованные объекты, такие как околопримесные экситоны [5], квантовые точки [6] и др.

Форма неэкспоненциальной релаксации может быть и отличной от (3), например, степенной. В дисперсионном переносе в полупроводниках для переходных токов характерен неэкспоненциальный закон типа [7]

$$p(t) \sim t^{-1-\alpha}, \quad t > t_{tr}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{4}$$

Своеобразные законы затухания возникают при переносе возбуждений в цепочке квантовых точек [8]. Релаксация поляризации диэлектриков также часто описывается степенным законом (4) [9].

Одной из наиболее известных причин появления неэкспоненциальной релаксации является наличие разброса параметров, характеризующих скорость обычной экспоненциальной релаксации. В ансамбле частиц, квантовых точек и т.п. создаются условия суммирования составляющих измеряемого сигнала. Это приводит к весьма своеобразным законам затухания сигнала, отличным от экспоненциального. Даже в отсутствие затухания суммарный сигнал от осцилляторов (классических, атомных) испытывает затухание, которые называют обратимой релаксацией, а связанное с ним уширение спектральной линии — неоднородным уширением [10–12]. Такие примеры неэкспоненциальной релаксации не обсуждаются далее в данной работе. Прежде всего интересуемся причинами и обоснованием неэкспоненциальной релаксации отдельного нанообъекта. Нанообъект здесь привлекается с точки зрения его малых размеров по сравнению с длинами волн окружающих полей, чтобы пренебрегать его пространственными характеристиками. Такие нанообъекты можно рассматривать как своеобразную открытую систему без разбросов части параметров, характеризующих ее взаимодействие с окружением. При этом разброс параметров, характеризующих взаимодействие нанообъекта с окружением, остается лишь в части дальнодействующего взаимодействия нанообъекта с частицами окружения.

Для описания неэкспоненциальной релаксации используют различные подходы. Однако в этом обзоре опишем только один подход, который активно развивается в последние два десятилетия и привлекает для анализа экспоненциальной релаксации уравнения в так называемых дробных производных, например вместо (1) используют

$${}_*D_t^\nu p(t) = -\gamma p(t). \tag{5}$$

Здесь через ${}_*D_t^\nu p(t)$ обозначена так называемая регуляризованная дробная производная (в определении Капуто):

$${}_*D_t^\nu p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\nu)} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-s)^{1+\nu-m}} \frac{d^m}{ds^m} p(s) ds, \ m-1 < \nu < m, \\ \frac{d^m}{dt^m} p(t), \quad m = \nu, \end{cases} \tag{6}$$

m — положительное целое число.

Решение уравнения (5)—(6) выражается через функцию Миттаг-Леффлера [13,14]

$$p(t) = E_\nu(-\gamma t^\nu), \tag{7}$$

где для комплексного параметра α

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad Re\alpha > 0. \tag{8}$$

Функция Миттаг-Леффлера (8) является обобщением ряда для экспоненты e^z путем замены $n! = \Gamma(n+1)$ на гамма-функцию $\Gamma(\alpha n+1)$. Под действием оператора дробного дифференцирования функция Миттаг-Леффлера (как и экспонента при обычном дифференцировании) остается инвариантной

$$_*D_t^{\nu}[E_\alpha(\lambda t^\alpha)] = \lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha) \tag{9}$$

и имеет асимптотику

$$E_\alpha(-\gamma t^\alpha) \sim \begin{cases} 1 - \frac{\gamma t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, & t \to 0+; \\ \frac{1}{\gamma}\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, & t \to \infty. \end{cases} \tag{10}$$

Из выражений (7) и (10) видно, что переход к описанию релаксации при помощи уравнений с дробными производными позволяет получать неэкспоненциальное затухание, причем экспоненциальное затухание проявляется как частный случай такого обобщенного подхода. Однако остается вопрос, какие основания существуют для такого перехода?

Релаксационные процессы, как правило, сопровождают динамику систем двух различных типов. К одному из них относятся нелинейные гамильтоновые динамические системы в условиях проявления детерминированного хаотического поведения [15]. К другому типу относятся открытые системы [16-18].

В случае открытых систем, взаимодействующих с широкополосным окружением (много степеней свободы) естественным языком описания их динамики является аппарат случайных процессов и стохастических дифференциальных уравнений. В данной статье будет показано, как в случае воздействия на открытую систему классических случайных процессов Леви общего вида возникает описание системы уравнениями с дробными производными. Однако прежде будут даны краткое введение в технику дробного интегрирования и дифференцирования, а также элементы теории классических процессов Леви и соответствующих стохастических дифференциальных уравнений.

2. Дробное интегрирование и дифференцирование

Дробное интегрирование и дифференцирование имеет давнюю историю, начиная еще с Лейбница (см. [19]), однако до недавнего времени развивалось как чисто математическая теория без особых приложений [20], быть может, за исключением задач пластичности и диффузии [21,22].

Одна из возможностей введения дробного интегрирования состоит в обобщении решения задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка вида $y^{(n)}(x) = f(x)$ с начальными условиями $y(a) = y'(a) = ... = y^{(n-1)}(a) = 0$. Решение можно записать в виде повторных интегралов

$$y(x) = \int_a^x du_1 \int_a^{u_1} du_2 ... \int_a^{u_{n-2}} du_{n-1} \int_a^{u_{n-1}} f(u_n)du_n = \int_a^x du_1 \int_a^{u_1} du_2 ... \int_a^{u_{n-2}} du_n f(u_n) \int_{u_n}^{u_{n-2}} du_{n-1} =$$

$$= \int_a^x du_1 \int_a^{u_1} du_2 ... \int_a^{u_{n-3}} du_{n-2} \int_a^{u_{n-2}} du_n f(u_n)(u_{n-2} - u_n) =$$

$$= \int_a^x du_1 \int_a^{u_1} du_2 ... \int_a^{u_{n-3}} du_n f(u_n) \int_{u_n}^{u_{n-3}} du_{n-2}(u_{n-2} - u_n) =$$

$$= \int_a^x du_1 \int_a^{u_1} du_2 ... \int_a^{u_{n-3}} du_n f(u_n) \frac{(u_{n-3} - u_n)^2}{2} = ...$$

$$= \int\limits_a^x du f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int\limits_a^x du f(u)(x-u)^{n-1}.$$

Правосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля $(-\infty \leqslant a < x < \infty)$ порядка α $(Re\alpha > 0)$ вводится как обобщение выписанной формулы для повторных интегралов

$$ {}_aI_x^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x du f(u)(x-u)^{\alpha-1} \tag{11}$$

Левосторонний дробный интеграл $(-\infty < x < b \leqslant \infty)$ определяется как

$$ {}_xI_b^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^b du f(u)(u-x)^{\alpha-1}. \tag{12}$$

Используются также обозначения $I_{a+}^\alpha f(x)$ и $I_{b-}^\alpha f(x)$.

Дробные интегралы на всей прямой (интегралы Вейля) используют как термины для бесконечных значений a и b:

$$ {}_{-\infty}W_x^\alpha f(x) := {}_{-\infty}I_x^\alpha f(x) = \int\limits_{-\infty}^x du f(u) \frac{(x-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

$$ {}_xW_\infty^\alpha f(x) := {}_xI_\infty^\alpha f(x) = \int\limits_x^\infty du f(u) \frac{(u-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Употребляют также обозначения ${}_{-\infty}W_x^\alpha f(x) := I_+^\alpha f(x)$, ${}_xW_\infty^\alpha f(x) := I_-^\alpha f(x)$. Заметим, что иногда введенные интегралы называют слегка иначе [23].

Право- и лево- сторонние интегралы связаны дробным интегрированием по частям (равенство Парсеваля):

$$\int\limits_a^b f(x)_a I_x^\alpha(g)(x)dx = \int\limits_a^b g(x)_x I_b^\alpha(f)(x)dx.$$

Для случая $a = 0$ часто используется обозначение ${}_0I_x^\alpha f(x) = J_x^\alpha f(x)$.

Перестановкой интегрирования нетрудно доказать полугрупповое свойство ${}_aI_x^\alpha({}_aI_x^\beta f(x)) = {}_aI_x^{\alpha+\beta} f(x)$, $\alpha, \beta > 0$. Отсюда, для целых n

$$\frac{d^n}{dx^n}\, {}_aI_x^{n+\beta} f(x) = {}_aI_x^\beta f(x), \quad \beta > 0.$$

Для отрицательных β, точнее $Re\beta < 0$ можно определить

$$ {}_aI_x^\beta f(x) := {}_aI_x^{n+\beta} f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\, {}_aI_x^{n+\beta} f(x), \quad \forall n > -Re\beta.$$

В случае чисто мнимой величины $\alpha = i\theta$ определения такие

$$ {}_aI_x^{i\theta} f(x) = \frac{d}{dx}\, {}_aI_x^{1+i\theta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1+i\theta)} \frac{d}{dx} \int\limits_a^x (x-a)^{i\theta} f(u) du.$$

Для $\alpha \geqslant 0$ и $\gamma > -1$ имеем соотношения

$$ {}_aI_x^\alpha (x-a)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+\alpha)} (x-a)^{\gamma+\alpha}, \quad J_x^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1+\alpha)} x^{\gamma+\alpha}. \tag{13}$$

Правостороннее дробное дифференцирование: для $Re\alpha > 0$ и $n = [\alpha] + 1$ как

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) := \frac{d^n}{dx^n}\ {}_aI_x^{n-\alpha} f(x). \tag{14}$$

Для $a = 0$ используют обозначение $D_x^\alpha f(x)$.

Определение ${}_aD_x^\alpha$, сходное с определением дробного интегрирования:

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_a^x (x-a)^{-\alpha-1} f(u)du, & Re\alpha < 0; \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n {}_aI_x^{n-\alpha} f(x), & Re\alpha > 0,\ n-1 \leqslant Re\alpha < n. \end{cases}$$

Видно, что при $\alpha = n$ имеем ${}_aD_x^n f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n\ f(x)$.

Дробное дифференцирование является обратным к дробному интегрированию в следующем смысле

$$ {}_aD_x^\alpha {}_aI_x^\alpha f(x) = f(x), \quad \alpha > 0. \tag{15}$$

Левосторонняя дробная производная порядка α определяется как

$$ {}_xD_b^\alpha f(x) := (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\ {}_xI_b^{n-\alpha} f(x), \quad n = [Re\alpha] + 1.$$

Выражения с $\alpha = 0$ ассоциируют с тождественными операторами ${}_aD_x^0 f(x) := {}_aI_x^0 f(x) = f(x)$.

Операторы дробного дифференцирования обладают свойством линейности

$$ {}_aD_x^\alpha (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) = c_1\ {}_aD_x^\alpha f_1(x) + c_2\ {}_aD_x^\alpha f_2(x),$$

а из равенства

$$ {}_aD_x^\alpha f(x) = {}_aD_x^\alpha g(x)$$

следует (c_j — произвольные постоянные)

$$ f(x) = g(x) + \sum_{j=1}^m c_j (x-a)^{\alpha-j}, \quad m-1 < \alpha \leqslant m. \tag{16}$$

Справедливо и обратное утверждением. Кроме того, имеем соотношение, аналогичное соотношению (13),

$$ {}_aD_x^\alpha (x-a)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} (x-a)^{\gamma-\alpha}, \quad D_x^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} x^{\gamma-\alpha}, \quad \gamma > -1. \tag{17}$$

Дробная производная Капуто вводится для регуляризации соотношений типа (16):

$$ {}^C D_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f^{(n)}(u)du}{(x-u)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1; \quad {}^C D_{a+}^m f(x) = f^{(m)}(x).$$

Здесь m — целое, а для $f^{(m)}(x)$ обозначает обычную производную m-го порядка (предполагается ее абсолютная интегрируемость). Для $a = 0$ часто используют другое обозначение ${}_*D_x^\alpha f(x)$. Этому случаю часто отдается предпочтение из соображений удобства формулировки задачи Коши и использования преобразования Лапласа.

Имеем соотношение, которое часто служит определением производной Капуто,

$$ {}_*D_x^\alpha f(x) = J_x^{m-\alpha} D_x^m f(x), \quad m-1 < \alpha \leqslant m.$$

Вместо (16) из равенства

$$ {}_*D_x^\alpha f(x) = {}_*D_x^\alpha g(x)$$

следует

$$f(x) = g(x) + \sum_{j=1}^{m} c_j x^{m-j}, \quad m-1 < \alpha \leqslant m.$$

Заметим, что

$$D_t^\alpha f(t) \equiv D_t^m J_t^{m-\alpha} f(t) \neq J_t^{m-\alpha} D_t^m f(t) \equiv {}_*D_t^\alpha f(t),$$

и между введенными производными существует связь

$${}_*D_x^\alpha f(x) = D_x^\alpha \left(f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0+) \frac{x^k}{k!} \right) =$$

$$= D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0+) \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}, \quad m-1 < \alpha < m.$$

Через $f^{(k)}(0+)$ обозначен правосторонний предел производной k-го порядка в нуле ($f^{(0)}(x) = f(x)$). В случае $f^{(k)}(0+) = 0$, $k = 0, 1, ..., m-1$ производные Капуто и Римана-Лиувилля совпадают. Отличия между введенными производными ярко проявляются в следующих соотношениях (сравни также формулы (14) и (17)):

$$D_t^\alpha t^{\alpha-1} = 0, \quad D_t^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}, \quad {}_*D_t^\alpha 1 = 0, \quad \alpha > 0, \quad t > 0.$$

Кроме того, для сравнения с (9) имеем соотношение $D_t^\alpha [E_\alpha(\lambda t^\alpha)] = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)$.

Наконец, *операторы дробного дифференцирования на всей прямой* обозначаются как $D_\pm^\alpha f(t)$ и для $0 < \alpha < 1$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} D_+^\alpha f(x) &:= {}_{-\infty}D_x^\alpha f(x) = \tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \tfrac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{x} du f(u)(x-u)^{-\alpha}, \\ D_-^\alpha f(x) &:= {}_xD_\infty^\alpha f(x) = -\tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \tfrac{d}{dx} \int\limits_{x}^{\infty} du f(u)(x-u)^{-\alpha}, \end{aligned} \tag{18}$$

В случае $1 \leqslant \alpha$

$$D_\pm^\alpha f(x) := \frac{(\pm 1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int\limits_0^\infty x^{n-\alpha-1} du f(x \mp u), \quad n-1 < \alpha \leqslant n.$$

Преобразования Лапласа являются одним из основных методов решения уравнения с дробными производными. Обозначим образ преобразования Лапласа функции $f(t)$ как $\tilde{f}(s)$:

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}\,(f(t), s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Для производной Капуто порядка $m-1 < \alpha \leqslant m$ образ Лапласа представляется в виде

$$\mathcal{L}\,({}_*D_t^\alpha f(t), s) = s^\alpha \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}(0+),$$

тогда как для производной Римана-Лиувилля имеем

$$\mathcal{L}\,(D_t^\alpha f(t), s) = s^\alpha \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} g^{(k)}(0+), \quad g(t) = J_t^{m-\alpha} f(t).$$

Если при этом пределы $f^{(k)}(0+)$ конечны, $k = 0, 1, 2, ...$, то $g^{(k)}(0+) = 0$, так что

$$\mathcal{L}\ (D_t^\alpha f(t), s) = s^\alpha \tilde{f}(s), \quad m-1 < \alpha < m. \tag{19}$$

Нетрудно найти одну из характерных функций теории уравнений с дробными производными, остающуюся инвариантной под действием дробного дифференцирования. Пусть $E(t)$ удовлетворяет уравнению

$$_*D_t^\alpha E(t) = E(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad E(0+) = 0.$$

Тогда

$$s^\alpha \tilde{E}(s) - s^{\alpha-1} = \tilde{E}(s), \quad \tilde{E}(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - 1}.$$

Это уже упоминавшаяся функция Миттаг-Леффлера $E(t) = E_\alpha(t^\alpha)$. В общем случае имеем следующий образ Лапласа обобщенной функции Миттаг-Леффлера:

$$\mathcal{L}\ (t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda e^{\alpha t}), s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}, \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad Re\alpha > 0, \quad Re\beta > 0.$$

Преобразования Фурье дробных операторов для всей прямой даются формулами

$$\mathcal{F}\ (I_\pm^\alpha f(t), k) = \frac{\widehat{f}(k)}{(\mp ik)^\alpha}, \quad 0 < Re\alpha < 1; \quad \mathcal{F}\ (D_\pm^\alpha f(t), k) = (\mp ik)^\alpha \widehat{f}(k), \quad 0 \leqslant Re\alpha,$$

где образ и обратное преобразование Фурье определяются как

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{F}\ (f(t), k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} f(t) dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt}\widehat{f}(k) dk$$

и

$$(\mp ik)^\alpha = \exp[\alpha \ln|k| \mp i\frac{\alpha\pi}{2}\mathrm{sign}k] = |k|^\alpha e^{\mp i\frac{\alpha\pi}{2}\mathrm{sign}k}.$$

Здесь последнее равенство справедливо только для вещественных значений α.

Подход Грюнвальда-Летникова позволяет ввести дробные операторы единым образом как обобщение предела конечной разности [24].

Наконец, приведем формулу, обобщающую *правило Лейбница* для дифференцирования произведения

$$_aD_t^\alpha[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(t)\,_aD_t^{\alpha-k} g(t). \tag{20}$$

Дифференцирование сложной функции, интеграла, зависящего от параметра, и другие сведения по дробному интегрированию и дифференцированию, а также решению уравнений, содержащих указанные операции, можно найти в монографиях [19–20, 23–27].

3. Процессы Леви и стохастические дифференциальные уравнения

Пусть релаксация некоторой переменной $z(t)$ открытой системы связана с воздействием на нее извне случайного процесса $L(t)$ и описывается, например, уравнением

$$dz(t) = a(z,t)dt + b(z,t)dL(t). \tag{21}$$

Уравнение (21) определяется интегральным уравнением

$$z(t) - z(0) = \int_0^t a(z,t')dt' + \int_0^t b(z,t')dL(t'),$$

в котором интегралы понимаются в смысле Ито [28], т.е в интегральных суммах подынтегральная функция берется в левых концах интервалов разбиения области интегрирования $[0, t]$, а пределы интегральных сумм понимаются в среднеквадратичном.

Для многомодового и стационарного внешнего окружения допустим, что воздействующий случайный процесс $L(t)$ обладает свойствами взаимной независимости и одинаковой распределенностью бесконечно малых приращений dL, а также стохастической непрерывностью [1]. Такие случайные процессы являются по определению процессами Леви [29–31].

Стохастическая непрерывность исключает из рассмотрения скачки в фиксированные моменты времени. При этом условие стохастической непрерывности не препятствует рассмотрению бесконечно малых детерминированных приращений. Детерминированное приращение dt входит в класс действительных приращений для процессов Леви. Этот детерминированный компонент процессов Леви обычно называют дрейфом. Его отличает пропорциональность dt.

Если интервал времени $[0, t]$ разбить на $N = [t/\delta t] + 1$ одинаковых отрезков, на i-ом из которых приращение случайного процесса обозначить через $\Delta S(i)$, то $S(N) = \sum\limits_{i=1}^{N} \Delta S(i)$, причем в силу одинаковой распределенности и независимости характеристическая функция $\varphi_S(q)$ (среднее $\varphi_S(q) = < \exp(iqS) >$) будет равна N-ой степени от характеристической функции приращения случайного процесса $[\varphi_{\Delta S}(q)]^N$. Потребуем сохранения формы распределений для $S(t)$ и $\Delta S(i)$ (быть может с учетом масштабного преобразования). При определенных условиях это можно доказать [29]. Тогда простейший вид характеристической функции

$$\varphi_\alpha(q) = \exp(-Dt|q|^\alpha). \tag{22}$$

Параметр $(Dt)^{1/\alpha}$ представляет собой параметр масштабирования.

Плотности вероятности (и сами случайные процессы) с описанным выше свойством относятся к классу устойчивых (α-устойчивых) плотностей распределения, поскольку они не меняют своей формы при сложении независимых идентично распределенных величин.

Для α-устойчивых процессов при $\delta t \to 0$ имеем сходимость по распределению $(\delta t)^{1/\alpha} S(t/\delta t) \to L(t)$, поскольку

$$< \exp(iqS(N)) > = < \exp(iqX(1)) >^N \to \exp(-\frac{t}{\delta t} D|q|^\alpha) =$$
$$= \exp(-Dt|\frac{q}{(\delta t)^{1/\alpha}}|^\alpha) = < \exp[iq(\frac{1}{(\delta t)^{1/\alpha}} L(t))] > .$$

Характеристическая функция для $L(t)$ дается формулой (22), а свойство самоподобия выражается равенством $L(at) = a^{1/\alpha} L(t)$, подразумевающее равенство всех соответствующих функций распределения.

Для нормируемости случайных величин с характеристической функцией (22) необходимо, чтобы $0 < \alpha \leqslant 2$. При трех значениях параметра α имеем явный вид для функций распределения вероятности. Для $\alpha = 2$ это гауссовская плотность распределения, $\alpha = 1$ — плотность распределения Коши (Лоренца) $C_\sigma(x)$, а для $\alpha = 1/2$ — плотность распределения Леви $L_\sigma(x)$:

$$C_\sigma(x) = \frac{\sigma}{\pi(x^2 + \sigma^2)}, \quad L_\sigma(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\sigma}{2x}}, \ x > 0; \\ 0, \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

---

[1]Если приращение ΔS в каждый временной интервал Δt удовлетворяет условию для любого $\varepsilon > 0$ $\underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Prob}}(|\Delta S| > \varepsilon) = 0$.

Хвосты распределения Леви и Коши шире, чем у гауссовского распределения.

Моменты порядка ν в случае α-устойчивых распределений конечны, если $0 < \nu \leqslant \alpha$. Поэтому среднее для устойчивых распределений конечно, если $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$ и бесконечно, если $\alpha < 1$. Единственное устойчивое распределение с конечной дисперсией — это гауссовское распределение ($\alpha = 2$).

Весь класс α - устойчивых процессов определяется характеристической функцией (теорема Леви-Хинчина)

$$\varphi_{\alpha,\beta}(q) = \begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha|q|^\alpha[1 - i\beta sign(q)tg(\frac{\pi\alpha}{2})] + i\mu q\}, & \alpha \neq 1; \\ \exp\{-\sigma|q|[1 + i\frac{2\beta}{\pi}sign(q)\ln(|q|)] + i\mu q\}, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{23}$$

Здесь μ параметр, характеризующий сдвиг плотности распределения. Для распределений, у которых есть среднее $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, параметр μ является средним. Новый параметр β характеризует асимметрию распределения. Когда $\beta = 0$ плотность распределения, для которой есть среднее, симметрична относительно этого среднего. Если $\beta \neq 0$ плотность распределения становится ассиметричной. Параметр β меняется в области $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$ и не влияет ни на устойчивость распределения, ни на его поведение при масштабировании.

Основные свойства функции плотности распределения

$$p_{\alpha,\beta}(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dq\varphi_{\alpha\beta}(q)e^{-iqx}$$

даются соотношениями

$$p_{\alpha,\beta}(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}p_{\alpha,\beta}(\frac{x-\mu}{\sigma};0,1), \quad p_{\alpha,-\beta}(x;0,1) = p_{\alpha,\beta}(-x;0,1).$$

Для $0 < \alpha < 2$ распределения $p_{\alpha,\beta}(x;0,1)$ представляются через функции Фокса [32]. Для больших $|x|$ хвосты функции плотности распределения вероятностей уменьшаются с ростом $|x|$ степенным образом $|x|^{-\alpha-1}$, $0 < \alpha < 2$.

Каждый процесс Леви может быть построен как сумма дрейфового процесса, винеровского процесса и составного пуассоновского процесса. Краткое пояснение состоит в следующем. Характеристическая функция дрейфового и винеровского процессов дается выражением

$$\varphi_W(q) = \exp(i\mu tq - t\sigma^2q^2),$$

тогда как составного пуассоновского процесса

$$\varphi_{J(t)}(q) = \exp[t\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda(\delta)(e^{iq\delta}-1)]d\delta] = \exp[t\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(\delta)(e^{iq\delta}-1)]d\delta].$$

Составляющие пуассоновского процесса имеют скорость $\lambda(\delta)$ и величину скачка δ. Средняя скорость скачка на единицу времени $\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda(\delta)d\delta$, $\lambda(\delta)/\lambda = p(\delta)$ дает плотность распределения вероятности того, что величина скачка равна δ.

Процесс Леви может быть строго определен и в случае, в котором скорость скачка может стремиться к бесконечности, если размер скачков стремиться к нулю. Для этого необходимо разбить интеграл по δ на две части, один для $\delta > 1$, и один для $\delta \leqslant 1$. Для скачков, величина которых больше единицы, плотность скорости скачка должна быть конечной $\int\limits_{|\delta|>1}\lambda(\delta)d\delta < \infty$.

Скорость скачка может стремиться к бесконечности, если величина скачка стремиться к нулю. Это заставляет процесс перемещаться вне составного скачкообразного процесса, а различия между скачками, дрейфом и диффузией размываются. Поскольку $e^{iq\delta}-1=iq\delta-\frac{q^2\delta^2}{2!}-i\frac{q^3\delta^3}{3!}+...$, то слагаемые $iq\delta$ и $\frac{q^2\delta^2}{2!}$ в случае $\lambda(\delta)\to\infty$ при $\delta\to 0$ дают дрейфовое и винеровское слагаемые. Исключая их, получаем, что характеристическую функцию процесса Леви в виде (теорема Леви-Хинчина)

$$\varphi_{J(t)}(q)=\exp[(iq\mu-\sigma^2q^2)t]\exp\{t[\int\limits_{|\delta|\leqslant 1}\lambda(\delta)(e^{iq\delta}-1-iq\delta)d\delta+\int\limits_{|\delta|>1}\lambda(\delta)(e^{iq\delta}-1)d\delta]\},\quad (24)$$

где мера (плотность) Леви $\lambda(\delta)$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_{|\delta|>1}\lambda(\delta)d\delta<\infty,\qquad \int\limits_{|\delta|\leqslant 1}\lambda(\delta)\delta^2d\delta<\infty$$

и для α- устойчивых процессов оказывается такой

$$\lambda(\delta)=\begin{cases} a\delta^{-(\alpha+1)}, & \delta>0;\\ b|\delta|^{-(\alpha+1)}, & \delta<0,\end{cases}\qquad a>0,\quad b>0. \quad (25)$$

С учетом описанного представления процесса Леви уравнение (21) может быть заменено таким

$$dz=f(z,t)dt+g(z,t)dW(t)+r(z,t)dJ'(t), \quad (26)$$

где $dJ'(t)$ — инкремент регуляризованного (описанного выше образом) составного пуассоновского процесса, который в свою очередь можно представить в виде

$$dJ'(t)=\sum_\delta{}'\delta dN(\lambda,\delta,t).$$

Справедлива алгебра

$$dW(t)dW(t)=dt,\quad dW(t)dN(\lambda,\delta,t)=dtdN(\lambda,\delta,t)=dtdW(t)=0, \quad (27)$$
$$dN(\lambda,\delta,t)dN(\lambda',\delta',t')=dN(\lambda,\delta,t)\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\delta\delta'}\delta_{tt'},\quad <dW(t)>=0,\quad <dN(\lambda,\delta,t)>=\lambda dt.$$

В случае простейших составных процессов линейные стохастические дифференциальные уравнения типа (21), (26), (27) легко решаются [33].

4. Дробная производная в уравнении Фоккера-Планка для процесса Леви

Вместо решения стохастических дифференциальных уравнений (21), (26) и (27) обычно решают уравнения для плотности вероятности типа уравнения Фоккера-Планка. В отличие от стандартного случая винеровского процесса уравнение типа Фоккера-Планка для процессов Леви общего вида содержит дробные производные. Это легко увидеть в простейшем случае (22). Плотность распределения $p(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-iqx}\varphi(q)dx$, будучи продифференцированной по времени, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-iqx}(-D|q|^\alpha)\varphi(q)dq.$$

Поскольку $\mathcal{F}\ (D^\alpha_\pm f(x),k)=(\mp ik)^\alpha\widehat{f}(k)$, то $\mathcal{F}\ ((D^\alpha_+ + D_-)f(x),k)=2|k|^\alpha\cos(\frac{\alpha\pi}{2})$, так что получаем для плотности вероятности α-устойчивого процесса Леви уравнение с дробными производными

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^\alpha}{\partial|x|^\alpha}p(x,t). \quad (28)$$

где введена симметричная дробная производная

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial|x|^\alpha}p(x) = -\frac{1}{2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}\{D_+^\alpha p(x) + D_-^\alpha p(x)\}. \tag{29}$$

5. Вывод уравнения Фоккера-Планка для процесса Леви из стохастического дифференциального уравнения

Простейшее стохастическое дифференциальное уравнение Леви в случае представления процесса Леви составным пуассоновским процессом имеет вид $dx(t) = dJ(t)$ с $dJ(t) = \sum\limits_\delta \delta dN(\lambda, \delta, t)$ и алгеброй (27). Инкремент произвольной «хорошей» функции $f(x)$можно представить так

$$df(x) = df(x(J(t))) = f(x(J(t) + dJ(t))) - f(x(J(t))) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f(x)}{\partial x^k}(dJ(t))^k =$$

$$= \sum_\delta dN(\lambda, \delta, t)\{f(x+\delta)) - f(x)\}.$$

После усреднения с учетом формул (25) и (27)

$$\frac{< df >}{dt} = a < \int\limits_0^\infty \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta^{\alpha+1}}d\delta > +b < \int\limits_{-\infty}^0 \frac{f(x+\delta) - f(x)}{|\delta|^{\alpha+1}}d\delta > . \tag{30}$$

Для представления слагаемых в (30) через дробные производные, преобразуем дробные производные на прямой (18) следующим образом. Пусть для определенности $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$D_+^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^x du f(u)(x-u)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^\infty dt \frac{d}{dx}f(x-t)t^{-\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^\infty dt \frac{d}{dx}f(x-t)\int\limits_t^\infty \frac{d\xi}{\xi^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^\infty d\xi \frac{f(x) - f(x-\xi)}{\xi^{\alpha+1}}.$$

Таким образом, возникает определение производной Маршо [25] $(0 < \alpha < 1)$

$$\mathbf{D}_+^\alpha f(x) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^\infty d\xi \frac{f(x) - f(x-\xi)}{\xi^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{-\infty}^x d\xi \frac{f(x) - f(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha+1}}.$$

На достаточно хороших функциях $f(x)$ обсуждаемые производные совпадают $\mathbf{D}_+^\alpha f(x) = D_+^\alpha f(x)$. Аналогично вводится производная Маршо, заменяющая $D_-^\alpha f(x)$:

$$\mathbf{D}_-^\alpha f(x) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^\infty d\xi \frac{f(x) - f(x+\xi)}{\xi^{\alpha+1}}.$$

В результате нетрудно заметить, что

$$\frac{< df >}{dt} = -a\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} < \mathbf{D}_-^\alpha f(x) > -b\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} < \mathbf{D}_+^\alpha f(x) > .$$

Преобразовать среднее ($p(x,t)$ плотность распределения вероятности для $x(t)$)

$$< \mathbf{D}_-^\alpha f(x) >= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx p(x,t)\mathbf{D}_-^\alpha f(x).$$

позволяет правило дробного интегрирования по частям

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx p(x,t)\mathbf{D}_+^\alpha f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\mathbf{D}_-^\alpha p(x,t).$$

Тогда уравнение Фоккера-Планка получается в виде, обобщающим результат (28),(29):

$$\frac{\partial p(x,t)}{dt} = -a\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\mathbf{D}_+^\alpha p(x,t) - b\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\mathbf{D}_-^\alpha p(x,t).$$

Этот вывод демонстрирует мощь подхода на основе стохастических дифференциальных уравнений и обобщает обычный вывод уравнения Фоккера-Планка в случае гауссовского процесса (см., например, [28]) на негауссовские процессы Леви с параметром $0 < \alpha < 1$.

6. Уравнение Фоккера-Планка для уравнения Ланжевена в случае процесса Леви

Рассмотрим движение частицы со скоростью v под действием регулярной F и флуктуирующей сил $A(t)$ в среде с трением ν. Уравнения Ланжевена представим в виде

$$dx = \mathrm{v}dt, \quad d\mathrm{v} = -(\nu\mathrm{v} - F)dt + S(dt),$$

где $S(dt) = \int\limits_t^{t+dt} A(t')dt'$ - процесс Леви с характеристической функцией (22).

Интегральное уравнение для функции f плотности вероятности в фазовом пространстве в марковском приближении запишем как

$$f(x,\mathrm{v},t+\Delta t) = \iint d(\Delta x)d(\Delta\mathrm{v})f(x-\Delta x,\mathrm{v}-\Delta\mathrm{v},t)\Psi(x-\Delta x,\mathrm{v}-\Delta\mathrm{v};\Delta x,\Delta\mathrm{v},\Delta t),$$

где $\Psi(x,v;\Delta x,\Delta\mathrm{v},\Delta t)$ — вероятность перехода (вероятность координате x и скорости v получить приращения соответственно Δx и $\Delta\mathrm{v}$ за интервал времени Δt). По сути дела это уравнение описывает случайное блуждание в двумерном (фазовом) пространстве, при котором за время Δt совершается скачок на величину $(\Delta x, \Delta\mathrm{v})$, не статистически зависящий от величины предыдущих скачков.

Вероятность перехода представляется в виде

$$\Psi(x,v;\Delta x,\Delta\mathrm{v},\Delta t) = \psi(x,\mathrm{v};\Delta\mathrm{v},\Delta t)\delta(\Delta x - \mathrm{v}\Delta t),$$

$$\psi(x,\mathrm{v};\Delta\mathrm{v},\Delta t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\exp[-ik(\Delta\mathrm{v}v + \nu\mathrm{v}\Delta t - F\Delta t) - D|k|^\alpha\Delta t].$$

При $\Delta t \to 0$ получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{v}\frac{\partial f}{\partial x} = -\int d(\Delta\mathrm{v})f(x,\mathrm{v}-\Delta\mathrm{v},t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\exp(-ik\Delta\mathrm{v})\{ik(\mathrm{v}-\Delta\mathrm{v})v - ikF + D|k|^\alpha\}.$$

Откуда нетрудно получить, с учетом (29) уравнение Фоккера-Планка в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{v}\frac{\partial f}{\partial x} + F\frac{\partial f}{\partial\mathrm{v}} = \nu\frac{\partial(\mathrm{v}f)}{\partial\mathrm{v}} + D\frac{\partial^\alpha}{\partial|\mathrm{v}|^\alpha}f.$$

Таким образом, обобщение уравнения Фоккера-Планка в случае «прямого» воздействия на открытую систему α-устойчивого процесса Леви достигается простой заменой обычной частной производной второго порядка на дробную производную порядка α. Случай $\alpha = 1$ здесь выделен, однако никак не проявляется, если использовать для решения уравнений преобразование Фурье [34]. Некоторые решения и анализ полученного уравнения даны в работе [34]. Там же рассмотрено уравнение Эйнштейна-Смолуховского с дробными производными.

7. Дробные производные в случае подчиненного случайного процесса

Проявления процессов Леви с бесконечной дисперсией в случае физической системы, в силу ее конечности, довольно сложно представить. Однако процессы Леви могут проявиться своеобразно, определяя стохастические моменты переходов в стандартных физических процессах, в том числе и на основе броуновского движения. Такое непрямое воздействие состоит в введении стохастической операционной временной переменной посредством α-устойчивого процесса Леви с $0 < \alpha < 1$. Условие на параметр α необходимо, чтобы случайный процесс, определяющий стохастическую временную переменную, имел неотрицательные приращения. Введение стохастического операционного времени определяет важный класс так называемых подчиненных (субординированных) случайных процессов [35].

Модель непрерывного во времени броуновского движения [36–38], в отличие от обычного одномерного броуновского движения, описывает случайные скачки величины R_i, которые происходят не в фиксированные моменты времени $\tau = i\delta\tau$, $i = 0, 1, 2, ...$, а после случайного времени ожидания T_i между последовательными скачками. Величины $T_1,\ T_2, ...$ представляют собой неотрицательные независимые одинаково распределенные (с плотностью вероятности $\varphi(t)$) случайные переменные, принадлежащие устойчивому вероятностному распределению с параметром α. К моменту времени t такие случайные блуждания совершат не детерминированное число $1 + [t/\delta\tau]$ скачков, а некоторое случайное число $N(t)$, определяемое условием $N(t) := \max\{N :\ T(N) \leqslant t\}$, где $T(N) = \sum\limits_{i=1}^{N} T_i$ — суммарное время ожидания N-го скачка. Координата броуновской частицы, находившейся в начальный момент времени в начале координат, к моменту времени t будет равна величине $r(t) := \mathrm{R}(N(t)) = \sum\limits_{i=1}^{N(t)} R_i$. Такой процесс получил название непрерывного во времени броуновского движения (НВБД). Будем обозначать плотность вероятности такого процесса на оси x как $p^r(x,t)$. При этом наряду с НВБД есть процесс простого броуновского движения (ПБД) в операционном времени τ с координатой $R(\tau) := \mathrm{R}(1 + [\tau/\delta\tau]) = \sum\limits_{i=1}^{1+[\tau/\delta\tau]} R_i$. Плотность вероятности этого процесса обозначаем как p^R. Тогда

$$p^r(t,x) = \int\limits_0^\infty p^R(\tau,x)p^S(\tau,t)d\tau, \tag{31}$$

где $p^S(\tau,t)$ — вероятность совпадения операционного τ и истинного времени t. Для $p^r(t,x)$ имеем интегральное уравнение

$$p^r(t,x) = \delta(x)\Psi(t) + \int\limits_0^t \varphi(t-t')dt' \int\limits_{-\infty}^\infty w(x-x')p^r(t',x')d\tau,$$

где $\Psi(t) = 1 - \int\limits_0^t \varphi(t')dt'$ - вероятность пребывания в начальном состоянии, $w(x)$ — вероятность скачка на величину x.

Грубо говоря, $N(t) = \{N : \ T(N) = t\}$ и поэтому является обратной функцией к $T(N)$, т.е. $T(N(t)) = t$. В пределе $\delta\tau \to 0$ имеем следующие α- устойчивые процессы

$$(1/\delta\tau)^{-1/\alpha}T(\tau/\delta\tau) \to U(\tau), \quad (\delta\tau)^{\alpha}N(t/\delta\tau) \to S(t) = \inf\{\tau : U(\tau) > t\},$$

$$(\delta\tau)^{1/2}\mathrm{R}(\tau/\delta\tau) \to X(\tau), \quad (\delta\tau)^{\alpha/2}\mathrm{R}(N(\frac{t}{\delta\tau})) \to \{(\delta\tau)^{\alpha}\}^{1/2}\mathrm{R}(N(\frac{t}{(\delta\tau)^{\alpha}})) \to X(S(t)),$$

причем $aS(t) = S(a^{1/\alpha}t)$ и $U(S(t)) = t$ (равенство почти наверное).

НВБД дает пример так называемых подчиненных или субординированных случайных процессов. Говорят, что $X(S(t))$ является подчиненным к процессу $X(t)$ и направляется процессом $S(t)$, который называется направляющим. Направляющий процесс иначе называют рандомизированным операционным временем.

Вероятностные характеристики направляющего процесса. Обозначим функцию плотности распределения вероятности для $U(\tau)$ через $p^T(t,\tau)$, а для $S(t)$ она дается $p^S(\tau,t)$. Тогда

$$p^S(\tau,t) = -\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^t p^T(t',\tau)dt'.$$

Тогда для $S(t)$ получаем

$$< \exp(-vS(t)) >= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-vt^{\alpha})^n}{\Gamma(1+n\alpha)} = E_{\alpha}(-vt^{\alpha}).$$

С учетом свойств функции Миттаг-Леффлера получаем плотность вероятности $S(t)$ в виде

$$p^S(\tau,t) = t^{-\alpha}M_{\alpha}(\tau/t^{\alpha}), \tag{32}$$

где введена M-функция Райта [39] [2]

$$M_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k!\Gamma(1-\alpha-k\alpha)}.$$

В результате несложных вычислений, полагая для ПБД функцию распределения в виде $p^R(\tau,x) = (\pi 2D\tau)^{-1/2}\exp(-x^2/(2D\tau))$, для НВБД находим [40]

$$\mathcal{L}\,(p^r(t,x),s) = s^{\alpha-1}\mathcal{L}\,(p^R(t,x),s^{\alpha}), \quad p^r(t,x) = f(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t d\tau(t-\tau)^{\alpha-1}\frac{D}{2}\frac{\partial^2 p^r(\tau,x)}{\partial x^2},$$

или в эквивалентной форме, используя дробную производную Римана-Лиувилля

$$D_t^{\alpha}p^r(t,x) - \frac{f(x)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = \frac{D}{2}\frac{\partial^2 p^r(t,x)}{\partial x^2}. \tag{33}$$

Здесь $f(x)$ - начальное распределение. Решение и дальнейшее обсуждение в работе [40].

---

[2] Функция $M_{\alpha}(z)$ неотрицательна для $z \geqslant 0$ и нормируема $\int\limits_0^{\infty} M_{\alpha}(z)dz = 1$, с образом Лапласа $\mathcal{L}\,(M_{\alpha}(t),s) = E_{\alpha,1}(-s)$. При $0 < \alpha \leqslant 1/2$ она монотонно убывает, а при $1/2 < \alpha < 1$ имеет максимум в некоторой точке, зависящей от α. Кроме того, $M_1(z) = \delta(z-1)$, $M_{1/2}(z) = \pi^{-1/2}e^{-z^2/4}$, $M_{1/3}(z) = 3^{2/3}Ai(z/3^{1/3})$, $Ai(z)$ - функция Эйри.

Интересное развитие НВБД получило в недавней работе [41], в которой скачки в случайные моменты времени определенным образом сгруппированы и вводится составной субординированный процесс, позволяющий исследовать релаксацию в сложных системах.

8. Заключение

В статье рассмотрены основные стохастические факторы, лежащие в обосновании моделей, описываемых уравнениями с дробными операторами. Можно рассматривать комбинированное воздействие этих факторов, в частности модели открытых систем, подверженных действию как процессов Леви, так и субординированных случайных процессов. В недавно опубликованных книгах [42–44] рассмотрен еще ряд моделей и приведена обширная библиография.

Некоторые физические приложения моделей с дробными производными можно найти в книгах [42–44]. Там же обсуждаются интерпретации дробных производных по времени как своеобразной памяти и немарковости (см., также, [40]), а дробных производных по пространственным переменным как отражение самоподобия и фрактальных свойств среды.

Другим фактором появления дробных операторов является обоснование формальных математических преобразований, например типа

$$\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial^2 x}=\left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}}+\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Кроме того, часто традиционные модели обобщают простой заменой обычных операторов на дробные [44].

Дальнодействующее взаимодействие сосредоточенной системы также иногда можно описывать уравнениями с дробной производной. Строгим примером является цепочка классических осцилляторов, которые взаимодействуют не только с ближайшими соседями, но и с остальными. При переходе в описании такой системы к континуальному пределу для некоторых типов взаимодействий получаются уравнения с дробными производными по пространственным переменным [45].

Как и в случае некоторых типов обычных детерминированных уравнений в частных производных, уравнения с дробными производными в ряде случаев могут быть промоделированы численным решением соответствующего стохастического дифференциального уравнения типа (26), (27).

Автор выражает благодарность Виталию Владимировичу Самарцеву за поддержку.

Литература

[1] Kohlrausch R. Ueber das Dellmannsche Elektrometer // Ann. Phys. Lpz. — 1847. — V.12. — P. 353–405.

[2] Lakes R. Viscoelastic Materials. CUP, 2009.

[3] Phillips J.C. Stretched exponential relaxation in molecular and electronic glasses // Rep.Progr. Phys. — 1996. — V. 59. — P.1133–1207.

[4] Chamberlin R.F. Experiments and theory of the nonexponential relaxation in liquids, glasses, polymers, and crystals, Phase Transitions 1998. — V.65, N.1-4. — P.169-209.

[5] Огородников И.Н., Пустоваров В.А. Аномальная релаксация околопримесных экситонов в кристаллах боратов лития, легированных ионами церия // Письма в ЖЭТФ. — 2012. — Т.96. В.5. — С.338–342.

[6] Madsen K.H., Ates S., Lund-Hansen T., Loffler A., Reitzenstein S., Forchel A., Lodahl P. Observation of non-markovian dynamics of a single quantum dot in a micropillar cavity // Phys.Rev.Lett. — 2011. — V.106. — P.233601.

[7] Сибатов Р.Т., Учайкин В.В. Дробно-дифференциальный подход к описанию дисперсионного переноса в полупроводниках // УФН — 2009. — Т.179. В.10. — С.1079–1104.

[8] Sibatov R.T. Statistical interpretation of transient current power-law decay in colloidal quantum dot arrays // Phys. Scr. — 2011. — V.84 025701.

[9] Jonscher A.K. Dielectric Relaxation in Solids. London, Chelsea Dielectrics Press, 1983; Jonscher A.K. Universal Relaxation Law. London, Chelsea Dielectrics Press, 1996.
[10] Berg M.A. Multidimensional Incoherent Time-Resolved Spectroscopy and Complex Kinetics // Advances in Chemical Physics, — 2012. — V.150. — P.1-102.
[11] Disorder Effects on Relaxational Processes. Eds. Richert R., Blumen A. Berlin, Springer, 1994.
[12] Maimistov A.I., Basharov A.M. Nonlinear optical waves. Dordrecht, Kluwer Academic 1999.
[13] Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena // Chaos, Solitons and Fractals — 1996. — V.7, N.9. — P.1461–1477.
[14] Mainardi F., Gorenflo R. Time-fractional derivatives in relaxation processes: A tutorial survey // Fractional calculus & Applied analysis 2007. V.10. N.3. P.269-308; Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity, London, Imperial College Press, 2010; Gorenflo R. Mittag-Leffler Waiting Time, Power Laws, Rarefaction, Continuous Time Random Walk, Diffusion Limit // Proc. Of the National Workshop on Fractional Calculus and Statistical Distributions, November 25-27, 2009 in: arXiv:1004.4413v1 [math.PR] 26 Apr 2010.
[15] Zaslavsky G.M. Hamiltonian chaos and fractional dynamics. — Oxford, 2005.
[16] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. Phys.Reports — 2000. — V.339. — P.1–77.
[17] Breuer H.-P., Petruccione F. Theory of open quantum systems. — Oxford, 2002.
[18] Башаров А.М. Квантовая теория открытых систем на основе стохастических дифференциальных уравнений обобщенного ланжевеновского (невинеровского) типа // ЖЭТФ. — 2012. — Т. 142, В.3(9). — С.419-441.
[19] Oldham K.B., Spanier J. The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. Academic Press, 1974.
[20] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Elsevier, 2006.
[21] Герасимов А.Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения. АН СССР. Прикладная математика и механика // 1948. — Т.12. — С.251–259.
[22] Caputo M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent - II. // Geophys. J. Astronom. Soc. — 1967. — V.13. — P.529–539.
[23] Miller K.S., Ross B. An Introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. N.-Y., John Wiley & Sons, 1993.
[24] Podlubny I. Fractional differential equations. Academic Press, 1999.
[25] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка. Минск, Наука и Техника, 1987.
[26] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
[27] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.
[28] Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986.
[29] Applebaum D. Levy processes and stochastic calculus. — CUP, 2009.
[30] Sato K. Lévy Processes and Infinitely Divisible distributions. — CUP, 1999.
[31] Kyprianou A. Introductory lectures on fluctuations of Levy processes with applications. — Springer, 2006.
[32] Mainardi F., Pagnini G., Saxena R.K. Fox H functions in fractional diffusion // J.Comp.Appl.Math. — 2005. — V.178. — P.321–331.
[33] Jacobs K. Stochastic Processes for Physicists. — CUP, 2010.
[34] Chechkin A.V., Gonchar V.Yu. Linear relaxation processes governed by fractional symmetric kinetic equations// ЖЭТФ 2000. — Т.118. В.3. — С. 730–748.
[35] Bertoin J. Subordinators, Lévy processes with no negative jumps, and branching processes. University of Aarhus, Aarhus, Denmark, 2000.
[36] Montroll E.W., Weiss G.H. Random Walks on Lattices. II // J.Math.Phys. — 1965. — V.6. — P.167.
[37] Scher H., Montroll E.W. Anomalous transit time dispersion in amorphous solids // Phys.Rev. — B 1975. V.12. — P.2455.
[38] Shlesinger M. Asymptotic solutions of continuous time random walks // J.Stat.Phys. — 1974. — V.10. — P.421–434.
[39] Mainardi F., Mura A., Pagnini G. The M-Wright Function in Time-Fractional Diffusion Processes: A Tutorial Survey // International Journal of Differential Equations — 2010. — V.2010. — Article ID 104505.
[40] Станиславский А.А. Вероятностная интерпретация интеграла дробного порядка // ТМФ 2004. — Т.138. В.3. — С.491–507.
[41] Weron K., Stanislavsky A., Jurlewicz A., Meerschaert M.M., Scheffler H.-P. Clustered continuous-time random walks: diffusion and relaxation consequences // Proc. R. Soc. A — 2012. — V.468. — P.1615–1628.

[42] Meerschaert M.M., Sikorskii A. Stochastic Models for Fractional Calculus. Berlin, Walter de Gruyter & Co, 2012.
[43] Учайкин В.В. Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008.
[44] Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. — М.: ИКИ, 2011.
[45] Tarasov V.E. Continuous limit of discrete systems with long-range interaction // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — V.39 — P.14895–14910.